# 차　　례

# 머 리 말

위대한 령도자 **김정일**대원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

정보산업시대, 지식경제시대에 들어선 오늘 수학의 지식과 방법을 모르고서는 현대과학과 기술을 배울수도 없고 발전시킬수도 없다. 바로 그렇기때문에 수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 된다.

시대의 변천에 따르는 사람들의 생활과 실천의 요구로부터 수와 도형에 관한 단편적인 지식의 축적으로 발생한 수학은 오늘 모든 과학과 기술의 기초로 되는 현대수학으로까지 발전하여왔다.

수학을 잘 배워 그 방법을 잘 익히면 머리가 트이고 모든 사물현상을 조리있게 보고 판단하는 힘이 생기며 과학적인 사고능력을 키울수 있다.

아무리 복잡한 수학공식이나 원리라고 하여도 자기 머리로 사고하고 처음부터 리치를 차근차근 따져가면 그것을 확고하게 습득할수 있으며 높은 수학적지능을 소유하면 그 어떤 어려운 문제도 쉽게 풀수 있고 새로운 공식도 발견할수 있다.

5학년 수학에서는 지금까지 배운 지식들을 높은 수준에서 보는 힘을 키워주면서 지수방정식과 로그방정식, 삼각함수와 복소수, 공간도형과 련립방정식, 순렬과 조합에 대하여 배운다.

우리는 자기 땅에 발을 붙이고 눈은 세계를 보며 조선을 위하여 배우고 또 배워 내 나라, 내 조국을 과학과 기술로 빛내이는 앞날의 훌륭한 인재가 되여야 한다.

# 제 1 장. 지수방정식과 로그방정식

지수함수와 로그함수

지수방정식과 지수안같기식

로그방정식과 로그안같기식

# 제 1 절. 지수함수와 로그함수

## 1. 지수함수

1) 지수식 $2^x$ 에서 서로 다른 $x_1=1$, $x_2=2$에 대하여 $2^{x_1}$, $2^{x_2}$ 이 다른가?

2) 서로 다른 임의의 두 $x$에 대하여서도 서로 다른 $2^x$이 정해지는가?

> $a$가 1이 아닌 정수일 때
>
> $$f(x) = a^x$$
>
> 으로 표시되는 함수를 지수함수라고 부른다.

**례 1** 지수함수 $f(x) = 2^x$ 의 그라프를 그려라.

(풀이) $x$의 값에 따르는 $2^x$ 의 값을 표로 작성하면 다음과 같다.

| $x$ | … | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | … | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | … |

이 표에 의하여 그라프를 그리면 그림1-1과 같다.

그림 1-1

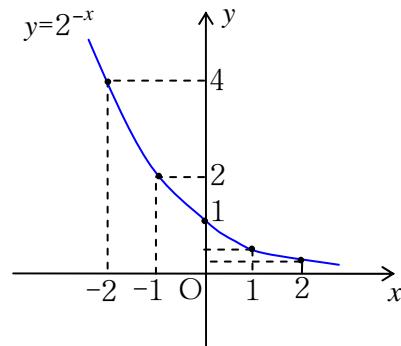
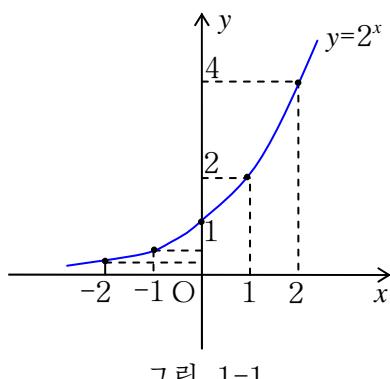



그림 1-2

**례 2** 지수함수 $f(x) = 2^{-x}$ 의 그라프를 그려라.

(풀이) $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$x$의 값에 따르는 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 값을 표로 작성하면 다음과 같다.

| $x$ | … | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | … | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | … |

이 표에 의하여 그라프를 그리면 그림 1-2와 같다.

례 1, 2에서 알수 있는것처럼 지수함수 $f(x)=2^x$ 의 그라프와 $f(x)=2^{-x}$ 의 그라프는 $y$축에 관하여 대칭이다.

1) 지수함수 $f(x)=2^x$ 은 증가하는 함수인가 감소하는 함수인가?

2) 지수함수 $f(x)=2^{-x}$ 은 어떤가?

3) $x$>0일 때 우의 두 함수의 값이 부수로 되는 때가 있겠는가?

**지수함수의 성질**

1) 뜻구역은 $(-\infty, +\infty)$, 값구역은 $(0, +\infty)$이다.

2) $x=0$일 때 함수값은 $y=1$이다.

3) $a>1$일 때 증가함수이고 $0<a<1$일 때 감소함수이다.

## 문 제

1. □안에 기호 = , < , > 가운데서 알맞는것을 써넣어라.
   1) $a>1$일 때 $a^k>a^\ell$이면 $k$ □ $\ell$
   2) $0<a<1$일 때 $a^k>a^\ell$이면 $k$ □ $\ell$
   3) $a\neq1$, $a>0$일 때 $a^k>a^\ell$이면 $k$ □ $\ell$
   4) $k<\ell$일 때 $a^k>a^\ell$이면 $a$ □ 1 ( $a$>0)
   5) $a>1$, $a^k<1$ 이면 $k$ □ 0
   6) $k<0$, $a^k>1$이면 $a$ □ 1
2. $a$>1일 때 다음것을 증명하여라.
   1) $x>0 \Rightarrow a^x>1$　　2) $x<0 \Rightarrow 0<a^x<1$
3. $0<a<1$일 때 다음것을 증명하여라.
   1) $x>0 \Rightarrow 0<a^x<1$　　2) $x<0 \Rightarrow a^x>1$
4. 함수 $y=2^x$ 의 그라프를 변환하여 다음 함수의 그라프를 그려라.
   1) $y=-2^x$　　2) $y=2^x-1$　　3) $y=2^{x-2}$　　4) $y=8\cdot2^x$

5. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=3^x$　　　2) $y=3^{|x|}$　　　3) $y=0.75^{|x|}$

6. $f(x)=a^x$일 때 다음 같기식을 증명하여라.

1) $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$

2) $\dfrac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$

3) $[f(x)]^y=f(xy)$

## 2. 로그함수

**알아보기** 지수함수 $f(x)=a^x$은 거꿀함수를 가진다. 왜 그런가?

> 지수함수 $f(x)=a^x$의 거꿀함수
>
> $y=\log_a x \quad (a\neq 1,\ a>0)$
>
> 를 로그함수라고 부른다.

로그함수의 그라프는 지수함수 $f(x)=a^x$의 그라프와 직선 $y=x$에 관하여 대칭이다.

**례 1** 로그함수 $y=\log_2 x$의 그라프를 그려라.

(풀이) 지수함수 $y=2^x$의 그라프로부터 $y=\log_2 x$의 그라프를 그리면 그림 1-3과 같다.

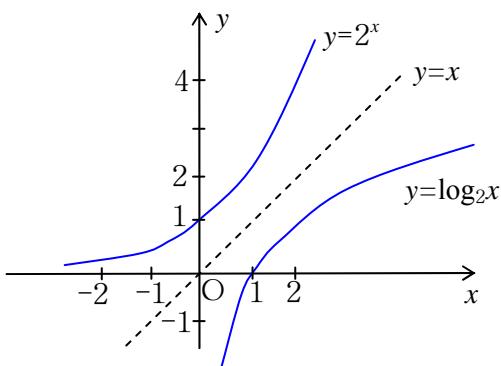



그림 1-3

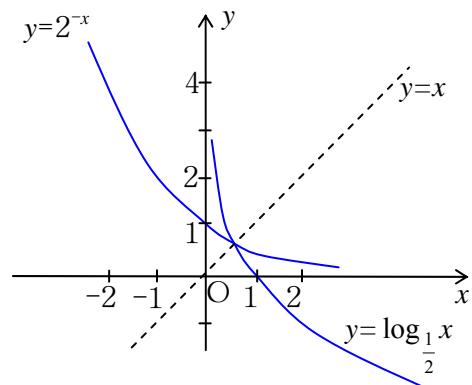



그림 1-4

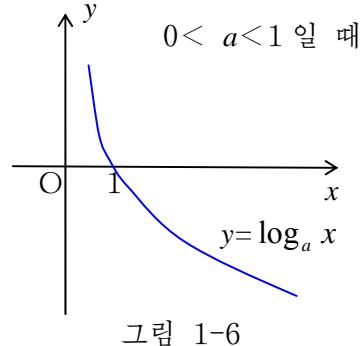
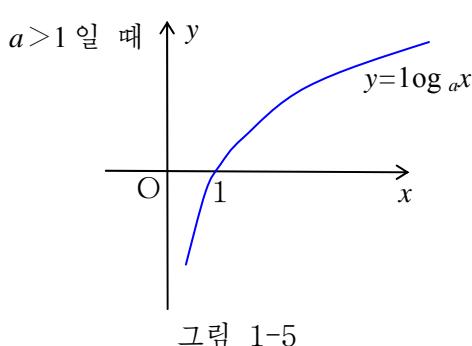
**례 2** 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그라프를 그려라.

(풀이) 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그라프로부터 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그라프를 그리면 그림 1-4와 같다.

**알아보기** 1) 로그함수 $y=\log_2 x$와 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 점 (1, 0)을 지나겠는가?

2) 로그함수 $y=\log_a x$는 어느 때 증가하고 어느 때 감소하는가?

그림 1-5

그림 1-6

**로그함수의 성질**

1) 뜻구역은 $(0, +\infty)$이고 값구역은 $(-\infty, +\infty)$이다.

2) $x=1$일 때 함수값은 $y=0$이다.

3) $a>1$일 때 증가함수이고 $0<a<1$일 때 감소함수이다.

## 문 제

1. 다음 안갈기식이 성립하자면 $a$는 어떤 수여야 하는가?

 1) $\log_a 8 < \log_a 5$  2) $\log_a \frac{1}{2} > \log_a \frac{1}{3}$

2. 로그함수 $y=\lg x$의 그라프를 리용하여 함수의 그라프를 그려라.

 1) $y=-\lg x$  2) $y=\lg(x+3)$  3) $y=\lg(-x)$

3. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y = \log_8|x|$ 2) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$

4. 다음 두 수가운데서 어느것이 큰가?

1) $\log_8 7$ , $\log_8 6.5$ 2) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{3}{4}$ , $\log_{\frac{1}{8}} 0.8$

5. $y=\log_2 x$ 와 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그라프는 $x$축에 관하여 대칭이라는것을 증명하여라.

## 련 습 문 제

1. 다음 함수들가운데서 지수함수를 찾아보아라.

1) $y=2^7$ 2) $y=\pi^x$ 3) $y=(-1.5)^{-2x}$

4) $y=x^{2x}$ 5) $y=0.75^x$

2. 다음 함수들가운데서 증가하는 함수와 감소하는 함수를 갈라내여라.

1) $y=4^x$ 2) $y=1.1^x$ 3) $y=0.99^x$

4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 5) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$

3. $y=2^x$의 그라프를 리용하여 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=-2^{x-2}$ 2) $y=2^{x+2}$ 3) $y=2^x+2$

4) $y=2^x+3$ 5) $y=-3 \cdot 2^x$

4. 다음 함수들가운데서 로그함수를 갈라내여라.

1) $y=\log_x 3$ 2) $y=\log_\pi x$ 3) $y=\lg(x-1)$

5. 다음 함수들가운데서 증가하는 함수와 감소하는 함수를 갈라내여라.

1) $y=\log_2 x$ 2) $y=\log_{\frac{4}{3}} x$ 3) $y=\log_{\frac{4}{3}} 2x$

4) $y=\log_{0.01} x$ 5) $y=\log_{0.01}(10\,000x+324)$

6. 다음 함수들가운데서 $y$축, $x$축에 관하여 대칭인것들을 찾아보아라.

1) $y=5^x$, $y=\left(\frac{5}{6}\right)^x$ , $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ , $y=(0.2)^x$, $y=1.2^x$

2) $\log_4 x$, $\log_{\frac{2}{3}} x$, $\log_{0.25} x$, $\log_2 x$, $\log_{1.5} x$

7. 다음 수들가운데서 1보다 큰것, 1보다 작은것을 찾아내여라.

1) $1.2^{0.75}$, $0.75^{\frac{3}{7}}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.15}$

2) $\log_4 8$, $\log_{\frac{2}{3}} 6$, $\log_3 0.2$, $\log_{1.5} 2.25$

8. 다음 수들을 커지는 차례로 써라.

1) $2^{-0.7}$, $2^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

2) $\log_2 0.6$, $\log_2 5$, $\log_{\frac{1}{2}} 0.5$, $\log_{\frac{1}{2}} 50$

9. $y=\log_2 x$의 그라프를 $y$축에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프가 얻어지는가?

## 제 2 절. 지수방정식과 지수안같기식

### 1. 지수방정식

**알아보기** 지수함수의 성질을 써서 다음것을 풀어라.

1) $a>0$, $a\neq 1$일 때 $a^k=a^\ell \Leftrightarrow k=\ell$이 옳다고 말할수 있겠는가?

2) $a$, $b>0$, $a$, $b\neq 1$, $a\neq b$일 때 $a^k=b^k \Leftrightarrow k=0$이 옳다고 말할수 있겠는가?

$2^{x+1}=8$, $3^{x+1}+3^x=1$ 과 같이 지수식이 들어있는 방정식을 지수방정식이라고 부른다.

지수방정식을 풀 때 다음의 명제들을 리용한다.

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}(a>0\,,\ a\neq 1)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

$$a^{f(x)}=b^{f(x)}(a,b>0\,,\ a,b\neq 1\,,\ a\neq b)\Leftrightarrow f(x)=0$$

**례 1** 방정식 $3^{x-1}=\frac{1}{27}$을 풀어라.

(풀이) $3^{x-1}=\frac{1}{3^3} \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^{-3} \Leftrightarrow x-1=-3$

따라서 $x=-2$

풀이모임 { -2 }

례 2 방정식 $2^{x+2}-2^{x}=96$을 풀어라.

(풀이) $2^{x}\cdot 2^{2}-2^{x}=96 \Leftrightarrow 3\cdot 2^{x}=96 \Leftrightarrow 2^{x}=32 \Leftrightarrow 2^{x}=2^{5}$

따라서 $x=5$

풀이모임 { 5 }

## 문 제

다음 지수방정식을 풀어라.(1-4)

1. 1) $4^{1-x}=32$ 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-2}=\frac{8}{27}$

 3) $2^{x+1}=3^{x+1}$ 4) $2^{x(x+1)}=3^{x(x+1)}$

2. 1) $3^{x+1}-3^{x}-54=0$ 2) $7^{x}-7^{x-1}=6$

3. 1) $9^{x}-4^{x}=2^{2x-1}$ 2) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$

 3) $3\cdot 9^{x-2}+4^{x-2}=4\cdot 3^{2x-4}$ 4) $2^{2x+1}=5\cdot 4^{x-2}+3^{2x-1}$

4. 1) $\begin{cases} 9^{x+y}=729 \\ 3^{x-y-1}=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{x}-2^{y}=4 \\ 2^{x-1}+2^{y-2}=5 \end{cases}$

### 2. 지수안같기식

알아보기 지수함수의 성질을 써서 다음것을 밝혀라.

1) $a>1$일 때 $a^{k}<a^{\ell} \Rightarrow k<\ell$

 $0<a<1$일 때 $a^{k}<a^{\ell} \Rightarrow k>\ell$

2) $a$, $b$가 어떤 정수일 때 $a^{k}<b^{k} \Rightarrow k>0$

$2^{x+1}>1$, $3^{x-1}<27$ 과 같이 지수식이 들어있는 안같기식을 지수안같기식이라고 부른다.

지수안같기식을 풀 때 다음 명제들을 리용한다.

$a^{f(x)}<a^{g(x)}$, $a>1 \Rightarrow f(x)<g(x)$

$a^{f(x)}<a^{g(x)}$, $0<a<1 \Rightarrow f(x)>g(x)$

$a^{f(x)}<b^{f(x)}$, $a, b\neq 1$, $b>a>0 \Rightarrow f(x)>0$

**례 1** 안갈기식 $2^x<0.25$를 풀어라.

(풀이) $2^x<0.25 \Leftrightarrow 2^x<\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x<2^{-2} \Leftrightarrow x<-2$

풀이모임 $(-\infty, -2)$

**례 2** 안갈기식 $3^{x+1}-3^x<54$를 풀어라.

(풀이) $3^{x+1}-3^x<54 \Leftrightarrow 3^x(3-1)<54 \Leftrightarrow 3^x<27 \Leftrightarrow x<3$

풀이모임 $(-\infty, 3)$

## 문 제

다음 지수안갈기식을 풀어라.(1-3)

1. 1) $3^x<\frac{1}{9}$  2) $6^x<216$  3) $0.3^x<0.3^{\frac{7}{3}}$  4) $10^{x-1}<0.01$

2. 1) $8^{x-1}\cdot 2^x>0.25$  2) $(10^x)^{\frac{1}{3}}0.001>10$  3) $\frac{(3^{-x})^2}{9}>3^x$

3. 1) $2^x-2^{x-3}>14$  2) $16^{x+\frac{1}{2}}\le 15\cdot 4^x+4$  3) $9^x+3>4\cdot 3^x$
   4) $10^x-5\cdot 10^{-x}>-4$  5) $3^{\sqrt{x^2-4x+3}}>3^{x-4}$

## 련 습 문 제

다음 지수방정식을 풀어라.(1-6)

1. 1) $9^x=3$  2) $5^x=0.2$  3) $7^x=7^{\sqrt{2}}$

2. 1) $27^x=\frac{\sqrt{3}}{3}$  2) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{32}{243}$  3) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

3. 1) $2^{x+1}+2^{x-2}=\frac{9}{16}$  2) $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$

4. 1) $2^{2x}+2^{x+2}-32=0$  2) $3^{2x+1}+9=28\cdot 3^x$  3) $3^x-18\cdot 3^{-x}=7$
   4) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$  5) $3^{2x}+3^{3x}=10\cdot 3^{x+2}$

5. 1) $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0.25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$  2) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

6. 1) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{x+3} + 9^{y+1} = 35 \\ 8^{\frac{x}{3}} + 3^{2y+1} = 5 \end{cases}$

다음 지수안갈기식을 풀어라.(7-10)

7. 1) $\left(5^{-x}\right)^{-2} > \frac{\sqrt{5}}{125}$ 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^x < \frac{1}{16}$

8. 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + 32 < 12\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 2) $3^{\frac{2x+3}{2}} < \sqrt{27^{2x-1}}$

9. 1) $2^{|x-1|} > 16$ 2) $0.2^{|x-1|} > 0.2^{x-2}$

10. 1) $3^{2x+1} < 3^{\sqrt{x+1}}$ 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-x-6}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$ 3) $5^{2x+1} > 5^x + 4$

4) $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} < 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$ 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{2-|x|}} > 9$

## 제 3 절. 로그방정식과 로그안갈기식

### 1. 로그방정식

$\log_2(x-2) = 3,\ \log_{10} x + \log_{10}(x-3) = 1$ 과 같이 로그식이 들어있는 방정식을 로그방정식이라고 부른다.

로그방정식은 로그의 정의와 로그의 성질을 써서 로그기호가 들어있지 않는 방정식으로 고쳐서 푼다. 이때 얻어진 풀이가운데서 로그방정식에 갈아넣어 0 또는 부수의 로그가 나타나게 되는것은 버려야 한다.

례 다음 방정식을 풀어라.

$$\lg x + \lg(x+3) = 1$$

(풀이) $\lg x + \lg(x+3) = 1g10$

$$x(x+3) = 10$$

$$x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5) = 0$$

이로부터 $x=2$, $x=-5$

여기서 $x=-5$는 버려야 한다.

풀이모임 { 2 }

## 문 제

다음 로그방정식을 풀어라.(1-4)

1. 1) $2\log_2 x = \log_2 32 - \log_2 x$　　2) $\log_3(x+5) = \log_3(2x-1)$

   3) $2(\lg x)^2 - \lg x^5 + 2 = 0$　　4) $(\lg x)^2 - \lg x^2 + 3 = 0$

2. 1) $\log_4 x + \log_x 4 = 0$　　2) $\log_2 x + \log_{16} x = 14$

   3) $\lg(\log_{32} x) = -1$

3. 1) $x^{\lg x} = 100$　　2) $\log_{x^2} 2 = -1$

4. 1) $\begin{cases} x + y = 29 \\ \lg x + \lg y = 2 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 3\lg x + 2\lg y = 7 \\ \lg \dfrac{x}{y} = -1 \end{cases}$

   3) $\begin{cases} \lg(x-y) + \lg(7x-8y) = 2 \\ \lg(x^3+y^3) - \lg(x^2-xy+y^2) = 1 \end{cases}$

### 2. 로그안같기식

로그식이 들어있는 안같기식을 로그안같기식이라고 부른다.

로그안같기식을 풀 때에도 먼저 로그기호가 들어있지 않는 안같기식으로 고친다. 이때 다음의 성질을 리용한다.

$$\log_a \mathrm{A} < \log_a \mathrm{B} \Leftrightarrow 0 < \mathrm{A} < \mathrm{B}\ (a > 1)$$

$$\log_a \mathrm{A} < \log_a \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} > \mathrm{B} > 0\ (0 < a < 1)$$

**례** 다음 안같기식을 풀어라.

$$\log_2 x + \log_2(x-1) < 1$$

(풀이) 로그의 의미로부터

$x>0$ , $x-1>0$

그러므로 $x>1$인 값들가운데서 풀이를 찾아야 한다.

$$\log_2 x + \log_2(x-1) < 1$$

$$\log_2 x(x-1) < \log_2 2$$

따라서 $x(x-1)<2$ 즉

$x^2-x-2<0$

이 안같기식을 풀면 $-1<x<2$

$x>1$ 이므로 $1<x<2$

풀이모임 (1, 2)

## 문 제

1. 다음 로그안같기식을 풀어라.

1) $\log_3(x-2)>1$ 2) $\log_{0.1}(x^2-x)>0$ 3) $\lg x+\lg(x-3)>0$

4) $\lg(x-3)+\lg x<1$ 5) $\log_2 x(\log_2 x+1)\le 2$ 6) $\lg(ax^2-4x)>\lg(x^2-4x+1)$

2. 함수 $y=\lg(x^2-3x+6)$ 에 대하여

1) $y=1$로 되는 $x$를 구하여라.

2) $x$가 어떤 값일 때 $y<0$으로 되겠는가?

3. 수 $\left(\frac{81}{80}\right)^{1\,000}$ 과 100 000은 어느것이 더 큰가?

4. 다음 안같기식을 $a>1$일 때와 $0<a<1$일 때로 갈라서 풀어라.

$$\frac{1}{x^{\log_a\sqrt{x}}}<\frac{x}{\sqrt{a^3}}$$

## 련습문제

다음 방정식을 풀어라.(1-3)

1. 1) $\log_2(x+8)-\log_2(5-x)=1$ 2) $\log_5(x^2-x+4)=2\log_5 x$

3) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$ 4) $\log_2 x-6\log_x 2=1$

2. 1) $2^{\log_x 2}=\frac{4}{x}$ 2) $8^{\lg x}=x$ 3) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{5+\lg x}=1$

3. 1) $\log_x\frac{1}{\sqrt{a}}=\log_a\frac{1}{x^2}\,(a>0)$ 2) $\log_a(x-a)+\log_a(2x-3a)=2$

4. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0\\ x^2-5y^2+4=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}=1\\ \log_2 x+\log_2 y=3\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2=29\\ \lg x+\lg y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\lg\left(xy+\frac{x}{y}\right)=0\\ \log_4\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}\right)=1\end{cases}$

5. $2\lg(x+y)=\lg x+\lg y+\lg 4.5$일 때 $x : y$의 값을 구하여라.

6. $y=a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$ , $z=a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$일 때 $x=a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$이라는것을 증명하여라.

7. 다음 안갈기식을 풀어라.

1) $\lg x^2+1<(\lg x^3-1)^2$

2) $\sqrt{\lg x-1}<3-\lg x$

3) $\lg x-1<\sqrt{\lg x^2+1}$

4) $\lg\sqrt{5(x+1)}>1-\frac{1}{2}\lg(2x-1)$

8. 다음 안갈기식의 풀이모임을 자리표평면에 표시하여라.

1) $\begin{cases} 2\lg y-\lg x<1 \\ x-y<1 \end{cases}$

2) $(\lg x)^2>(\lg y)^2$

9. $y=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$의 최소값을 구하여라.

10. $2^{10}\cdot(3^9)^1\cdot(2^{-3})\cdot 3^{2^3}=2^x\cdot 3^y$일 때 ( $x, y$)의 값을 아래에서 찾아보아라.

1) (7, 17)　　2) (13, 17)　　3) (7, 15)　　4) (15, 16)

## 복 습 문 제

1. 함수 $y=2^x-a2^{-x}$의 그라프가 원점에 관하여 대칭이다. 이때 $a$의 값을 구하여라.

2. $2^x=5^y=10^z$일 때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$임을 증명하여라.

3. $a^{2x}=2$일 때 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 값을 구하여라.

4. 다음 방정식을 풀어라.

1) $4^{x+1}-9\cdot 2^{x+2}+32=0$

2) $3^{x+1}+6\cdot 3^{1-x}=29$

3) $4^x+6^x=9^x$

4) $9^x=3^{x+1}-2$

5) $4^x+9^x=25^x$

5. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 2^{x+y} = 32 \end{cases}$  2) $\begin{cases} 4^x - 4^y = 48 \\ 2^{x+y} = 32 \end{cases}$  3) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$

6. 다음 안갈기식을 풀어라.

1) $\dfrac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$  2) $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x < 7 \cdot 10^x$  3) $2^x < 3^{\frac{1}{x}}$

4) $\dfrac{1}{2^x - 4} > \dfrac{1}{2^x - 1}$  5) $\dfrac{2^{x+3} + 11}{2^{2x+1} + 2^x - 15} < 3$  6) $\dfrac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \ge 5$

7. 다음 함수들가운데서 $y = x$와 같은 그라프를 가지는 함수를 찾아보아라.

1) $y = \sqrt{x^2}$  2) $y = \dfrac{x^2}{x}$

3) $y = a^{\log_a x}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$  4) $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

8. $f(x) = \log_a \dfrac{1 - mx}{-1 + x}$ ( $a > 0,\ a \neq 1$) 는 $m$이 어떤 값을 가질 때 $(1, +\infty)$에서 증가 또는 감소하는가?

9. $\log_3 2$, $\log_3(2^x - 1)$, $\log_3(2^x + 1)$은 $x$가 어떤 값을 가질 때 같은차수렬을 이루는가?

10. 다음 방정식을 그라프로 풀어라.

1) $2^x = x^2$  2) $\log_2(x - 2) = 5 - x$

11. 방정식 $\log_2(ax - 1) + \log_2(2x + 1) = 1$이 하나의 풀이를 가지자면 $a$가 어떤 값을 가져야 하는가?

12. 방정식 $\lg(x - 1) + \lg(3 - x) = \lg(a - x)$의 풀이의 개수를 따져보아라.

13. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases}\log_2(x-2y)=0\\ \log_2 x+2\log_2(y-2)=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\lg x\cdot\lg y=8\\ \log_x y^2-\log_y x+1=0\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=7\\ \log_x(3x+y-6)=\log_y(3x+y-6)\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2\\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2\end{cases}$

14. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $\dfrac{3}{1-\lg\sqrt{x}} < \lg\dfrac{1}{x^2}$ 2) $\log_a(2x^2-8)>\log_a(x^2-3x+2)$

3) $x^{3+\log_a x} < a^2x^2 \quad (a\neq 1,\ a>0)$ 4) $|x-1|^{\log_2(4-x)}>|x-1|^{\log_2(1+x)}$

5) $\sqrt{\log_{\sqrt{2}} x^2+\log_2 x^4}>\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x^2}{4}$

15. $x=\lg t$ , $|\lg t^2|=y$ 일 때 $x$와 $y$의 관계를 구하고 그것을 그라프로 표시하여라.

16. 안같기식 $4000<\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<5000$ 에 맞는 자연수 $n$을 구하여라.

17. 다음것을 구하여라.

1) $\log_2 x+\log_2 y=3$ 일 때 $2x+y$ 의 최소값

2) $\lg x+\lg y=2$ 일 때 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 의 최소값

3) $2x+y=10$ 일 때 $\lg x+\lg y$ 의 최대값

18. $\lg\sqrt{5-x}+\lg 2=\lg(x+3)$ 을 풀어라.

19. 안같기식 $\log_a(x^2-x-2)>\log_a(-x^2+2x+3)$ 는 $x=\dfrac{9}{4}$ 일 때 성립한다.

$a$의 값범위를 구하여라.

# 제 2 장. 삼각함수

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\arctan \alpha$$

일반각과 삼각함수
삼각함수의 그라프
거꿀삼각함수
삼각방정식

# 제 1 절. 일반각과 삼각함수

## 1. 라디안

그림 2-1은 각 O의 정점을 중심으로 하고 반경이 각각 $r_1, r_2, r_3$인 부채형을 그린것이다.

1) 얻어진 부채형들이 모두 닮았다고 말할수 있는가?

2) 다음것이 옳은가?

$$\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\ell_3}{r_3} = \cdots$$

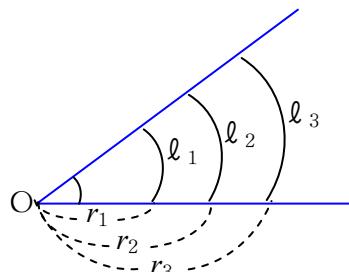



그림 2-1

그림 2-2와 같이 임의의 각 O의 시작변에 한 점 M을 정하고 반경이 $r$=OM인 활등 $\overset{\frown}{MM_1} = \ell$을 그리면 각 O의 크기에만 관계되고 반경 $r$의 길이에는 관계되지 않는 비

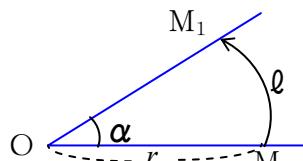
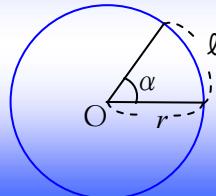
$$\frac{\ell}{r} = \alpha$$

를 얻는다.

그림 2-2

매개 각에 대하여 그 각의 정점을 중심으로 하는 활등의 길이와 반경의 비를 그 각의 라디안수(또는 라디안)라고 부른다.

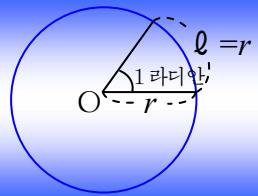
$$\frac{\ell}{r} = \alpha \text{(라디안)}$$

각의 크기를 표시하는 실수는 다 라디안수로 본다.

(주의) 수 $\alpha$가 각의 크기를 나타내는 수라는것을 뚜렷이 밝힐 필요가 있을 때에는 $\alpha$ 라디안(또는 $\alpha$ rad)이라고 쓴다.

$$\alpha \text{ 라디안} \longleftrightarrow \alpha$$
$$2 \longleftrightarrow 2 \text{ 라디안}$$

$\ell = r$ 이면

$$\frac{\ell}{r} = \frac{r}{r} = 1 \text{ (라디안)}$$

반경과 같은 길이의 활등에 대한 중심각의 크기는 1 라디안이다.

$\ell=2\pi r$(원둘레)이면

$$\frac{\ell}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi \text{ (한바퀴각)}$$

이고 한바퀴각은 도수로 360° 이므로

$2\pi=360°$

$$1 \text{ 라디안} = \frac{360°}{2\pi}=\frac{180°}{\pi}\approx\frac{180°}{3.14}\approx 57°\ 17'\ 45''$$

$$1° = \frac{2\pi}{360}=\frac{\pi}{180}\text{(라디안)}$$

이로부터

일반적으로 $\theta°$ 가 $\alpha$ 라디안이면

$$\alpha=\frac{180°}{\pi}\cdot\alpha=\theta°,\qquad \theta°=\frac{\pi}{180°}\cdot\theta°=\alpha$$

례 1 다음의 라디안수는 도수로, 도수는 라디안수로 표시하여라.

1) 2 라디안 2) $\pi$ 3) 3.14 4) 90° 5) 12° 30′

(풀이) 1) $1 \text{ 라디안} =\frac{180°}{\pi}$ 이므로

$$2 \text{ 라디안} = \frac{180°}{\pi}\cdot 2=\frac{360°}{3.14}\approx 114.6°$$

2) $\pi=\frac{180°}{\pi}\cdot\pi=180°$

3) $3.14=\frac{180°}{\pi}\cdot 3.14\approx\frac{180°}{3.14}\cdot 3.14=180°$

4) $90^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$

5) $12^{\circ}\ 30' = \left(12\frac{1}{2}\right)^{\circ} = \left(\frac{25}{2}\right)^{\circ}$ 이므로

$12^{\circ}\ 30' = \frac{\pi}{180} \cdot \left(\frac{25}{2}\right) = \frac{5\pi}{72}$

## 문 제

1. 다음의 도수를 라디안수로 고쳐라.
   1) $0^{\circ}$, $90^{\circ}$, $180^{\circ}$, $270^{\circ}$, $360^{\circ}$
   2) $30^{\circ}$, $45^{\circ}$, $60^{\circ}$, $15^{\circ}$, $75^{\circ}$
   3) $22^{\circ}\ 45'$, $157^{\circ}\ 15'$, $216^{\circ}\ 30'$
2. 다음의 라디안수를 도수로 고쳐라.
   1) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$
   2) 3, 6.28, $1.25\pi$, $0.5\pi$, 15.7

**알아보기** 반경이 $r$ 인 원에서

1) 중심각이 1 인 활등의 길이 $\ell$ 은

$$\ell = r \cdot 1$$

이다. 중심각이 $\alpha$ 인 활등의 길이 $\ell$ 을 표시하여라.

2) 원의 면적은 $\pi r^2$ 이고 한바퀴각은 $2\pi$ 이므로 중심각이 1 인 부채형의 면적 S 는

$$S = \frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2}$$

이다. 중심각이 $\alpha$ 인 부채형의 면적 S 를 표시하여라.

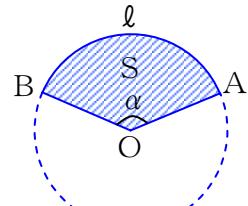



그림 2-3

반경이 $r$ 인 원에서 중심각이 $\alpha$ 인 활등의 길이를 $\ell$, 부채형의 면적을 S 라고 하면

$$\ell = r\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\alpha = \frac{1}{2}r\ell$$

**례 2** 반경이 12㎝이고 중심각이 60°, $\frac{4}{3}\pi$인 두 부채형의 활등의 길이 $\ell$과 면적 S를 각각 구하여라.

(풀이) 1) $\alpha=60°$ 일 때 $60°=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\ell=\alpha\cdot r=\frac{\pi}{3}\cdot 12=4\pi\ (\text{cm})$$

$$S=\frac{1}{2}r^2\alpha=\frac{1}{2}\cdot 12^2\cdot\frac{\pi}{3}=24\pi\ (\text{cm}^2)$$

(또는 $S=\frac{1}{2}r\ell=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4\pi=24\pi$)

2) $\alpha=\frac{4}{3}\pi$일 때

$$\ell=\alpha r=\frac{4}{3}\pi\cdot 12=16\pi\ (\text{cm})$$

$$S=\frac{1}{2}r\ell=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 16\pi=96\pi\ (\text{cm}^2)$$

### 문 제

1. 반경이 5cm이고 중심각이 72°, 120°인 부채형의 활등의 길이와 면적을 구하여라.
2. 반경이 10cm이고 중심각이 다음과 같은 부채형의 활등의 길이와 면적을 계산하여라.

$$120°,\ 270°,\ \frac{3}{4}\pi,\ 3.14,$$

3. 두 점 A, B에서 사귀는 두 원 $O_1(r)$, $O_2(r)$가 있다. $\angle AO_1B=\frac{\pi}{2}-\alpha$일 때 두 원의 공통부분의 면적은 원의 면적의 몇분의 1인가?

## 2. 일반각

평면에서 회전이동은 회전중심 O와 회전각 $\theta_0$에 의해서 정해지며 회전각의 크기는 회전방향이 정방향인가, 부방향인가에 따라서 정수(정각) 또는 부수(부각)로 표시된다.

**해보기** 1) 반직선 OX는 회전이동 O(120°), $O(\frac{4}{3}\pi)$, O(360°), $O(-\frac{8}{3}\pi)$, O(-240°)에 의하여 반직선으로 넘어간다. 그 반직선을 그려보아라.

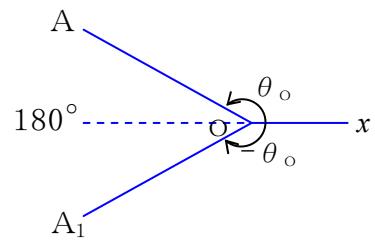



그림 2—4

2) 반직선 OX의 회전이동에서 회전각이 한바퀴각보다 작은 각은 $-\pi < \theta_0 \le \pi$와 같은 각 $\theta_0$ 으로 표시할수 있다. 왜 그런가?

각을 반직선이 돌아간 방향과 돌아간 회수까지 생각하여 있을수 있는 회전각으로 볼 때 각의 크기를 일반각이라고 부른다.

일반각 $\boldsymbol{\theta}$는 다음과 같은 모양으로 표시된다.

$$\theta=\theta_0+360^\circ k \quad (-180^\circ<\theta_0\le 180^\circ)$$

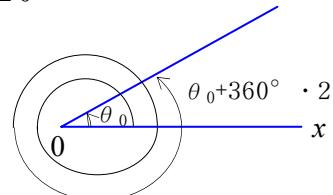
또는 $$\theta=\theta_0+2\pi k \quad (-\pi<\theta_0\le\pi)$$

$$(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

이때 $\theta_0$ 을 일반각 $\boldsymbol{\theta}$의 엄지값이라고 부른다.

(주의) 엄지값을 $0^\circ \le \theta_0 < 360^\circ$ 또는 $-360^\circ < \theta_0 \le 0^\circ$ 와 같이 정할수도 있다.

그림 2—5

**례** $755^\circ$를 엄지값을 써서 표시하여라.

(풀이) $755^\circ=35^\circ+360^\circ\cdot 2$

따라서 엄지값 $\theta_0=35^\circ$

## 문 제

1. 다음의 각은 몇도인가? 또 몇라디안인가?

1) 정방향으로 $\frac{1}{3}$바퀴, 1.5바퀴, $1\frac{1}{3}$바퀴, $2\frac{5}{12}$바퀴 돈 각

2) 부방향으로 $\frac{11}{12}$바퀴, $1\frac{2}{3}$바퀴, $1\frac{2}{9}$바퀴, $2\frac{5}{6}$바퀴 돈 각

2. 다음의 각은 각 $\alpha$를 어느 방향으로 몇바퀴 더 돌린 각인가?

1) $\alpha+360^\circ\cdot 3$ 2) $\alpha+360^\circ\cdot(-4)$

3) $\alpha+2\pi\cdot(-12)$ 4) $\alpha+2\pi\cdot 8$

3. 엄지값이 다음과 같은 일반각을 써라.

$$47^\circ, \ -22^\circ, \ \frac{3}{5}\pi, \ -0.82\pi$$

4. 다음 각들을 엄지값을 써서 표시하여라.

1) $360^\circ$, $421^\circ$, $400^\circ$, $1\ 080^\circ$, $1\ 360^\circ$

2) -380°, 315°, -450°, -726°, -1 200°

3) $\frac{9}{4}\pi$, $2.5\pi$, $6.2\pi$, $\frac{19}{2}\pi$, $12\pi$

4) $-\frac{7\pi}{2}$, $-4.5\pi$, $-16\pi$, $-3\frac{3}{4}\pi$, $-12.3\pi$

5. 첫 변이 같은 두 각 $\alpha, \beta$에 대하여 다음의 경우에 어떤 관계식이 성립하는가?
   1) 끝변이 일치하는 경우
   2) 끝변이 한 직선에서 서로 반대방향인 경우
   3) 끝변이 수직인 경우

### 3. 삼각함수

1) 자리표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반경이 $r$인 원을 그린다. $x$축의 정방향과 뾰족각 $\theta$를 이루는 반경 OM의 끝점 M의 자리표가 $(x, y)$일 때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$를 $r$, $x$, $y$로 표시하여라.

그림 2-6

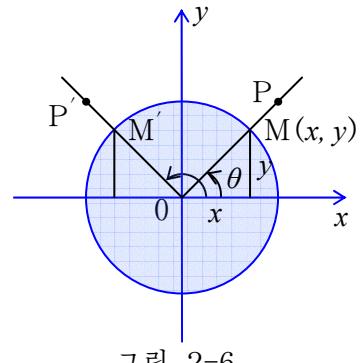
2) 주어진 각 $\theta$가 일반각일 때 그것을 이루는 끝변 OP의 한 점 M$(x, y)$를 잡고 OM$=r$라고 하면 비

$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x},\ \frac{x}{y},\ \frac{r}{x},\ \frac{r}{y} \qquad (1)$$

은 OP에서 점 M을 어떻게 잡는가에 관계없이 일정하다. 왜 그런가?

각 $\theta$가 일반각일 때에도 $\theta$의 값에 비 (1)의 값이 각각 하나씩 정해진다. 따라서 매개의 비

$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x},\ \frac{x}{y},\ \frac{r}{x},\ \frac{r}{y}$$

는 각 $\theta$의 함수로 된다.

> 각 $\theta$의 끝변의 임의의 한 점을 M$(x, y)$를 잡고 OM$=r$ (점 0는 원점)라고 하자. 이때 $\theta$를 $\frac{y}{r}$로 보내는 함수를 시누스(sin) 또는 시누스함수라고 부르고
>
> $$\sin: \theta \to \frac{y}{r} \text{ 또는 } \sin\theta = \frac{y}{r}$$
>
> 로 표시한다.

이와 마찬가지로

$$\cos: \theta \to \frac{x}{r} \quad \text{또는} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad : \quad \text{코시누스함수}$$

$$\tan: \theta \to \frac{y}{x} \quad \text{또는} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad : \quad \text{탕겐스함수}$$

$$\cot: \theta \to \frac{x}{y} \quad \text{또는} \quad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad : \quad \text{코탕겐스함수}$$

$$\sec: \theta \to \frac{r}{x} \quad \text{또는} \quad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad : \quad \text{세칸스함수}$$

$$\mathrm{cosec}: \theta \to \frac{r}{y} \quad \text{또는} \quad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{r}{y} \quad : \quad \text{코세칸스함수}$$

를 정의한다.

이 함수들을 통털어서 **삼각함수**라고 부른다.

삼각함수의 정의에 의하여

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

**례** $\theta=210°$일 때 함수 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값들을 구하여라.

(풀이) $\angle MOK=210°-180°=30°$

따라서 직3각형 MOK에서

$OM : MK : OK = 2 : 1 : \sqrt{3}$

그러므로 $OM=2$라고 하면 $M(-\sqrt{3}, -1)$이다.

$r=2$, $x=-\sqrt{3}$, $y=-1$이므로

$$\sin 210° = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210° = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

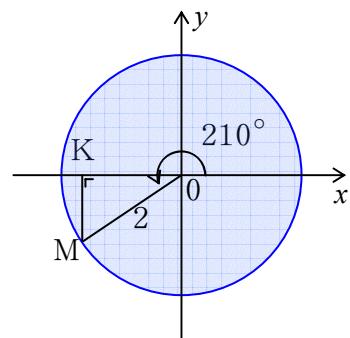



그림 2-7

## 문 제

1. $\theta=0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$일 때 다음의 삼각함수값을 구하여라.

$$\sin\theta, \ \cos\theta, \ \tan\theta, \ \cot\theta$$

2. 그림 2-8을 보고 $225°$, $420°$일 때 다음의 삼각함수값을 구하여라.

$$\sin\theta, \ \cos\theta, \ \tan\theta$$

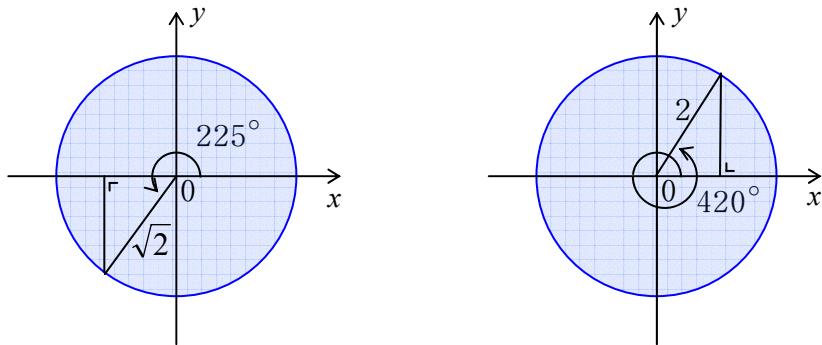



그림 2-8

3. $\theta = -\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5}{4}\pi$일 때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$를 구하여라.

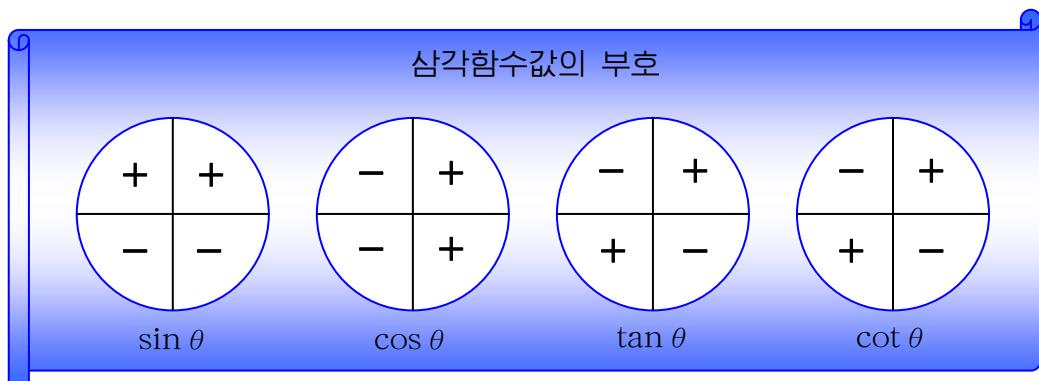
4. 다음 식을 계산하여라.

1) $(2\sin\frac{3}{4}\pi)^2$  2) $3\cos\frac{7}{6}\pi - 5$  3) $\dfrac{\sin\frac{2}{3}\pi}{\left(\tan\frac{11}{12}\pi\right)^3}$  4) $2\cot\frac{5}{12}\pi - \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}$

## 4. 삼각함수값의 부호

**알아보기** 1) 반경이 $r=1$인 원을 **단위원**이라고 부른다.

단위원 O(1)에서 각 $\theta$의 끝변이 원둘레와 사귄 점을 $M(x, y)$라고 하면 $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$이다. 왜 그런가?

2) 단위원에서 각 $\theta$의 끝변이 원둘레와 사귄 점을 $M(x, y)$라고 할 때 매 $x$, $y$의 부호를 말하여라.

**례 1** $\sin 573°$, $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$의 부호를 말하여라.

(풀이) $573° = 213° + 360°$이므로 이 각의 끝변은 3사분구에 놓인다.

따라서 $\sin 573°$의 부호는 −이다.

$-\frac{7}{3}\pi = -\frac{\pi}{3} - 2\pi$이므로 이 각의 끝변은 4사분구에 놓인다.

따라서 $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$의 부호는 +이다.

**례 2** 식 $-\frac{0.75\tan 125°}{\sin 850°}$의 값의 부호를 밝혀라.

(풀이) $\tan 125° < 0$ (125°는 2사분구의 각이므로)

$\sin 850° = \sin(130° + 360° \cdot 2) > 0$ (850°는 2사분구의 각이므로)

따라서

$$-\frac{0.75\tan 125°}{\sin 850°} > 0$$

즉 주어진 식의 값의 부호는 + 이다.

## 문 제

1. 다음 삼각함수값의 부호를 말하여라.

1) $\sin 170°$, $\sin\frac{5}{18}\pi$, $\sin 329°$, $\sin 753°$, $\sin 5\pi$,

$\sin 1023°$, $\sin\left(-\frac{11}{6}\pi\right)$, $\sin(-635°)$

2) 우에 지적된 각들에 대한 코시누스, 탕겐스값들의 부호를 말하여라.

2. 다음 식의 값의 부호를 말하여라.

1) $2\sin\frac{56}{45}\pi\cos\frac{56}{45}\pi$　　2) $-0.3\tan\frac{23}{9}\pi\cot\frac{16}{9}\pi$

3) $\frac{\tan 520°}{\sin 195°}$　　4) $-\frac{0.5\cot 172°}{\sin 520°\cos 510°}$

## 련습문제

1. 1) 다음의 도수를 라디안수로 고쳐라.

$57°18'$, $40°30'$, $-30°22'$, $-18°48'$

2) 다음의 라디안수를 도수로 고쳐라.

$3$, $\frac{2}{7}\pi$, $-2.5\pi$, $-\frac{4}{3}\pi$

2. 3각형의 세 아낙각의 비가 2:3:4이다. 매 각의 크기를 도수와 라디안수로 표시하여라.

3. 다음 각을 도수로 표시하고 $\alpha\in[0,\ 2\pi]$일 때 $\alpha$의 값을 다 써라.( $n$은 자연수)

1) $\alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi n$  2) $\alpha=(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi$

3) $\alpha=-\frac{\pi}{9}+\frac{5}{8}\pi n$  4) $\alpha=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$

4. 원둘레를 15등분한 활등에 대한 중심각의 크기를 도수와 라디안으로 밝혀라.

5. 직경이 3.6m인 바퀴가 1분동안에 600바퀴 돈다.

1) 바퀴의 임의의 점의 각속도 $\omega$를 구하여라.(각속도는 단위시간동안에 돌아간 각이다.)

2) 축으로부터 1.2m 떨어진 곳에 있는 바퀴의 점의 선속도를 구하여라. (선속도는 단위시간동안에 이동한 거리이다.)

6. 다음 식의 값의 부호를 말하여라.

1) $\frac{240}{\tan 132°57'}$  2) $-\frac{30.25}{\sin 638°25'}$  3) $\frac{\sin 323°30'}{\cot 440°15'}$  4) $\frac{116\cos 130°40'}{\tan 360°20'}$

7. 다음 식을 계산하여라.

1) $\left(4\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(2\tan\frac{\pi}{6}\right)^2-\left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2-\left(2\cot\frac{\pi}{4}\right)^2$

2) $\dfrac{4-\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\cot\frac{\pi}{4}\right)^4}{3\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3-4\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2+4\cot\frac{\pi}{4}}$

8. 다음의 명제가 주어졌다.

1) $\sin x+\cos x=\frac{3}{2}$인 실수 $x$가 존재한다.

2) $\alpha,\beta$가 1사분구의 각이고 $\alpha>\beta$이면 $\cos\alpha<\cos\beta$이다.

3) $\cos\alpha\cdot\cos\beta=1$이면 $\sin(\alpha+\beta)=0$이다.

여기서 옳은것을 지적하여라.

## 제 2 절. 삼각함수의 그라프

### 1. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 의 그라프

**알아보기** 다음것이 옳은가?

각 $x$ 의 끝변과 각 $x + 2k\pi$ 의 끝변은 일치하므로 이 각들의 삼각함수값은 같다. 즉

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

한편 전화공식으로부터

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x \quad \text{이므로}$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x, \quad \cot(x + k\pi) = \cot x$$

변수 $x$ 의 임의의 값에 대하여 정수 $\ell$ 이 있어서

$$f(x \pm \ell) = f(x)$$

이면 함수 $f(x)$ 를 주기함수, $\ell$ 을 주기라고 부른다.

보통 주기 $\ell$ 은 웃식에 맞는 가장 작은 수를 택한다.

**례** $\sin x, \cos x$ 는 $2\pi$ 를 주기로 하는 주기함수이고 $\tan x, \cot x$ 는 $\pi$ 를 주기로 하는 주기함수이다.

주기함수의 그라프는 주기만한 크기의 변수구간에서 그린 그라프부분이 되풀이된것이다.

례를 들어 주기함수 $\sin x$ 와 $\cos x$ 의 경우에는 그라프가 구간 $[0, 2\pi]$ 에서의 그라프부분이 되풀이된것이고 $\tan x$ 와 $\cot x$ 의 경우에는 각각 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $(0, \pi)$ 에서의 그라프부분이 되풀이된것이다.

그러므로 이 구간에서 삼각함수의 그라프부분만 알면 삼각함수의 그라프는 다 알수 있다.

#### 1) $y = \sin x$ 의 그라프

**해보기** 단위원둘레를 쓰면 자리표평면에서 점 $(x, \sin x)$ 를 쉽게 얻을수 있다.

각 $x$ 에 대하여 점 $x$ 를 찍고 $y$ 축에 평행인 중심축에 $\sin x$ 를 찍는다. 이 점들을 지나며 자리표축에 평행인 직선들의 사귐점으로 점 $(x, \sin x)$ 를 얻는다.

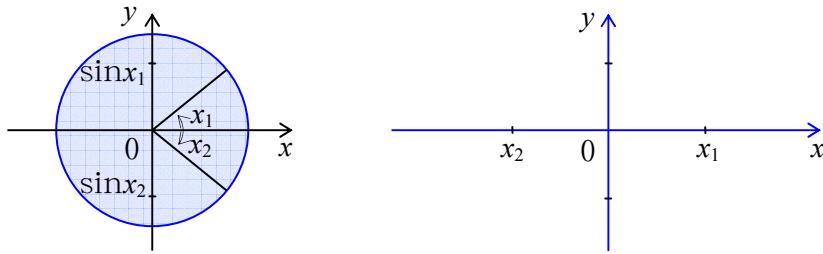



그림 2-9

그림 2-9에 있는 자리표평면에 점 $(x_1, \sin x_1)$과 $(x_2, \sin x_2)$를 찾아 찍어보아라.

이런 방법으로 함수 $y=\sin x$의 그라프를 다음과 같이 그린다.

① $x$축에 다음의 점들을 찍는다.

$$-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4},\ 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \cdots,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi$$

② $y$축에 평행인 원의 중심축에 시누스값을 표시하는 다음의 점들을 찍는다.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right),\ \sin 0,\ \sin\frac{\pi}{4},\ \sin\frac{\pi}{2},\ \cdots,\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \sin\frac{7\pi}{4},\ \sin 2\pi$$

③ 이 점들에서 자리표축에 평행인 선들을 그어 사귐점들을 얻고 그 점들을 미끈하게 맺는다.

$$\left(-\frac{\pi}{2},\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),\ \left(-\frac{\pi}{4},\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),\ (0,\ \sin 0),\ \left(\frac{\pi}{4},\ \sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}\right),\ \cdots,\ \left(\frac{3\pi}{2},\ \sin\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\frac{7\pi}{4},\ \sin\frac{7\pi}{4}\right),\ (2\pi,\ \sin 2\pi)$$

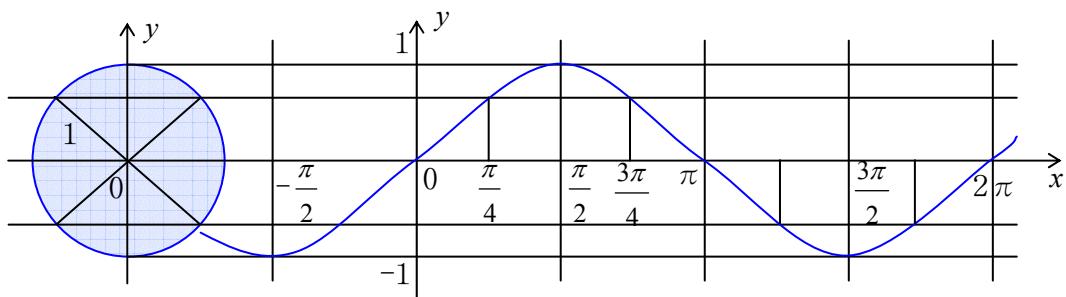



그림 2-10

이렇게 그린 구간 $[0,\ 2\pi]$에서의 그라프를 구간 $\cdots,\ [-2\pi,\ 0],\ [2\pi,\ 4\pi],\ [4\pi,\ 6\pi],\cdots$ 에서 되풀이하면 임의의 구간에서 $y=\sin x$의 그라프를 그릴수 있다.

함수 $y=\sin x$의 그라프에 의하여 이 함수의 성질을 알수 있다.

| $y=\sin x$의 그라프의 특징 | 함수 $y=\sin x$의 성질 |
|---|---|
| 1) $y=\pm1$사이에 있다.<br>2) 점 $x=k\pi$ ($k$:옹근수)에서 $x$축과 사귄다.<br>3) 구간 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi]$에서 오른다.<br>4) 구간 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$에서 내린다.<br>5) 원점 0에 관하여 대칭이다.<br>6) $2\pi$를 주기로 하여 되풀이된다. | 1) 뜻구역 $(-\infty,+\infty)$, 값구역 $[-1,1]$<br>2) $x=k\pi$ ($k$:옹근수)일 때 함수값은 0이다.<br>3) 구간 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi]$에서 함수는 증가한다.<br>4) 구간 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$에서 감소한다.<br>5) $y=\sin x$는 홀함수이다. 즉 $\sin(-x)=-\sin x$ $(x\in R)$<br>6) $y=\sin x$는 주기함수이다. (주기는 $2\pi$이다.) |

문 제

1. 다음 함수의 그라프는 $y=\sin x$의 그라프에 어떤 변환을 해서 얻을수 있는가? 그 그라프를 그려라.

   1) $y=-\sin x$　　2) $y=\sin(-x)$　　3) $y=-\sin(-x)$

2. $y=\sin x$의 그라프를 다음과 같이 평행이동하였을 때 얻은 그라프를 식으로 표시하여라.

   1) $x$축의 정방향으로 1만큼　　2) $y$축의 정방향으로 0.3만큼

2) $y=\cos x$의 그라프

**알아보기** 단위원둘레를 쓰면 자리표평면에서 점 $(x,\ \cos x)$도 쉽게 얻을수 있다. 각 $x$에 대하여 점 $\sin x$는 $y$축에 평행인 중심축에 직접 찍을수 있었다. 그러나 점 $\cos x$는 $x$축에 놓이는 원의 중심축에 있으므로 그것을 $y$축에 평행인 중심축에로 옮겨야 한다. 그밖의 것은 점 $(x,\ \sin x)$를 얻을 때와 같다. 그림 2-11에 있는 자리표평면에 점 $(x_1,\ \cos x_1)$과 $(x_2,\ \cos x_2)$를 찍어보아라.

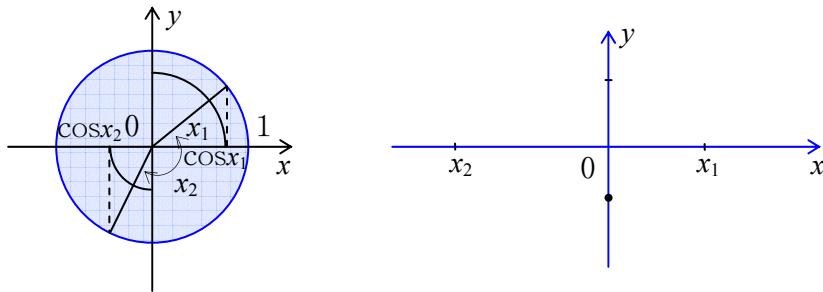



그림 2-11

이런 방법으로 함수 $y=\cos x$의 그라프를 다음과 같이 그린다.

① $x$축에 다음의 점들을 차례로 찍는다.

$$0,\quad \frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{4},\quad \cdots,\quad 2\pi$$

② $x$ 축과 일치하는 중심축에 코시누스의 값을 표시하는 점들을 찍고 그것을 $y$축에 평행인 중심축에 옮겨찍는다.

$$\cos 0,\quad \cos\frac{\pi}{4},\quad \cos\frac{\pi}{2},\quad \cos\frac{3\pi}{4},\quad \ldots,\quad \cos 2\pi$$

③ 이렇게 찍은 점들에서 자리표축에 평행인 직선들을 그어 그 사귐점들을 얻고 그 점들을 미끈하게 맺는다.

$$(0,\ \cos 0),\ \left(\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \cos\frac{\pi}{2}\right),\ \cdots,\ (2\pi,\ \cos 2\pi)$$

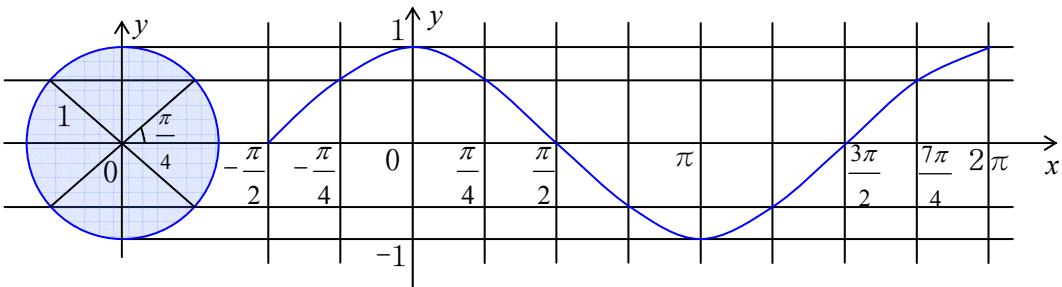



그림 2-12

이렇게 그린 구간 [0, $2\pi$]에서의 그라프를 구간 …, [$-2\pi$, 0], [$2\pi$, $4\pi$], [$4\pi$, $6\pi$], … 에서 되풀이하면 임의의 구간에서 $y=\cos x$의 그라프를 그릴 수 있다.

함수 $y=\cos x$의 그라프는 다음과 같은 특징을 가진다.

$y=\cos x$의 그라프의 특징

1) 직선 $y=\pm1$사이에 있다.

2) 점 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 에서 $x$축과 사귄다. ($k\in Z$)

3) 구간 $[2k\pi, \pi+2k\pi]$에서 내리고 구간 $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$ 에서 오른다.

4) $y$축에 관하여 대칭이다.

5) $2\pi$를 주기로 하여 되풀이된다.

문 제

1. 함수 $y=\cos x$의 성질을 그라프의 특징에 기초하여 말하여라.
2. 다음 함수들의 그라프는 $y=\cos x$의 그라프에 어떤 변환을 해서 얻을수 있는가? 그 그라프를 그려라.
   1) $y=-\cos x$ 2) $y=\cos(-x)$ 3) $y=-\cos(-x)$
3. $y=\cos x$의 그라프를 다음과 같이 평행이동하였을 때 얻은 그라프를 식으로 표시하여라.
   1) $x$축의 정방향으로 2만큼 2) $y$축의 정방향으로 $\frac{3}{4}$만큼
4. $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 그라프는 어떤 관계가 있는가?

### 3) $y=\tan x$의 그라프

**알아보기** 단위원둘레에서 각 $x$에 대한 탕겐스, 코탕겐스의 값은 그림 2-13에서와같이 중심축에 평행인 접선들에 표시할수 있다. 그 리유를 설명하여라.

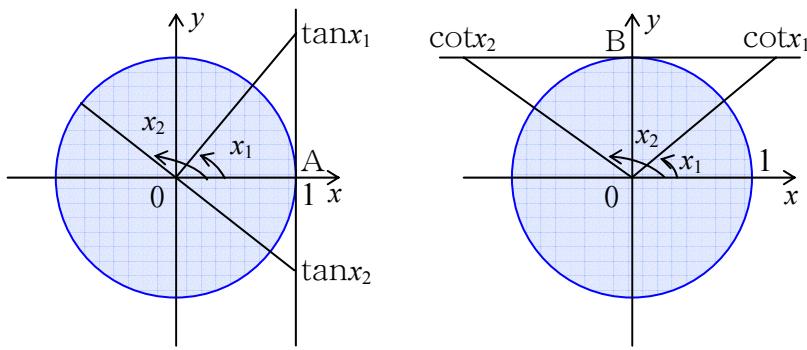



그림 2-13

단위원을 쓰면 자리표평면에서 점 $(x, \tan x)$를 쉽게 얻을수 있다.

각 $x$에 대하여 점 $x$를 $x$축에 찍고 점 $\tan x$를 $y$축에 평행인 접선에 찍는다.

이 점들을 지나며 자리표축에 평행인 직선들의 사귐점으로 점 $(x, \tan x)$를 얻는다.

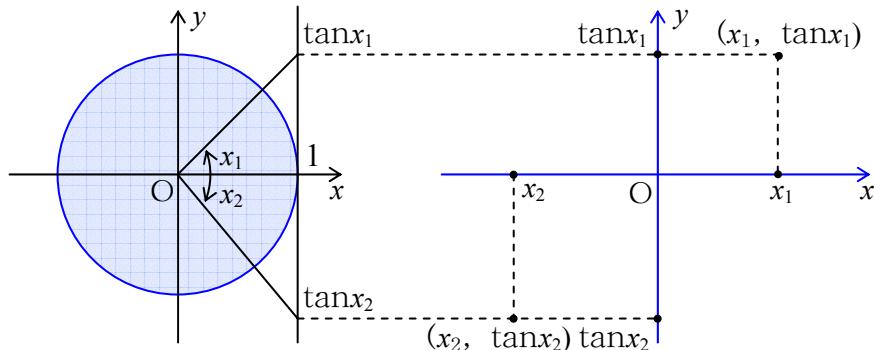



그림 2-14

이런 방법으로 함수 $y=\tan x$의 그라프를 그리면 그림 2-15와 같다.

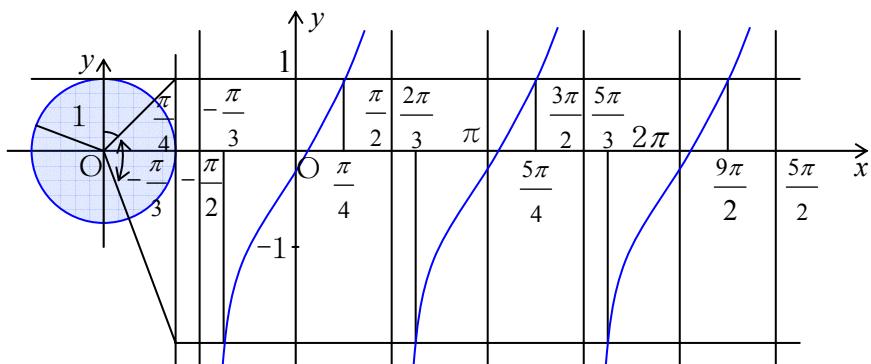



그림 2-15

함수 $y=\tan x$의 그라프는 다음과 같은 특징을 가진다.

**$y=\tan x$의 그라프의 특징**

1) 점 $\frac{\pi}{2}+k\pi$에서 우아래로 한없이 뻗는다. $(k\in Z)$

2) 점 $x=k\pi$ 에서 $x$축과 사귄다.

3) 구간 $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi)$에서 오른다.

4) 원점 O에 관하여 대칭이다.

5) $\pi$를 주기로 하여 되풀이된다.

## 문 제

1. 함수 $y=\tan x$의 성질을 그라프의 특징에 기초하여 말하여라.
2. $y=\tan x$의 그라프를 $x$축의 정방향으로 3만큼 이동하고 $y$축의 정방향으로 -5만큼 이동한것을 식으로 표시하여라.
3. 다음 함수의 그라프는 함수 $y=\tan x$의 그라프에 어떤 변환을 하여 얻을수 있는가를 보고 그라프를 그려라.

   1) $y=-\tan x$ 2) $y=\tan(-x)$ 3) $y=-\tan(-x)$

### 4) $y=\cot x$의 그라프

**알아보기** 다음 그림 2-16은 단위원을 써서 자리표평면에 점 $(x, \cot x)$를 찍는 방법을 보여준다. 그 리유를 설명하여라.

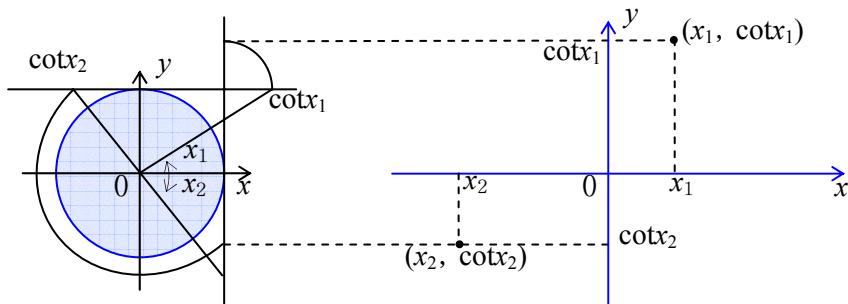



그림 2-16

이런 방법을 써서 함수 $y=\cot x$의 그라프를 그리면 그림 2-17과 같다.

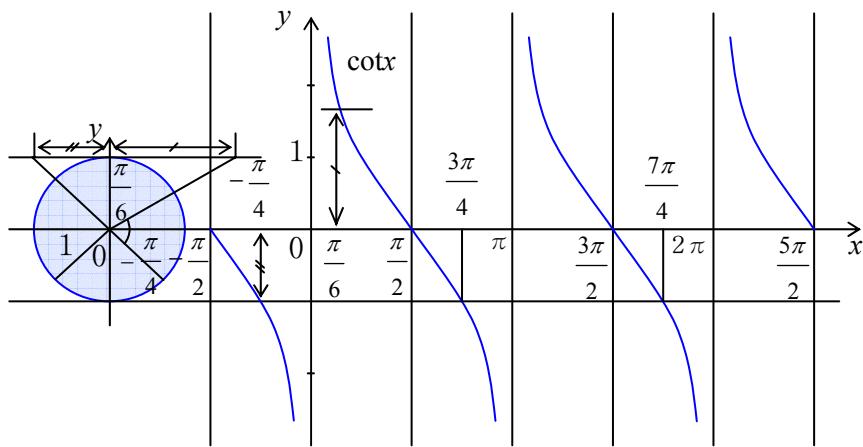



그림 2-17

함수 $y=\cot x$의 그라프는 다음과 같은 특징을 가진다.

$y=\cot x$의 그라프의 특징

1) 점 $k\pi$에서 아래우로 한없이 뻗는다. $(k\in Z)$

2) 점 $\frac{\pi}{2}+k\pi$에서 $x$축과 사귄다.

3) 구간 $(k\pi, (k+1)\pi)$에서 내린다.

4) 원점 O에 관하여 대칭이다.

5) $\pi$를 주기로 하여 되풀이된다.

## 문 제

1. 함수 $y=\cot x$의 그라프의 특징에 기초하여 이 함수의 성질을 말하여라.
2. 다음 함수의 그라프는 $y=\cot x$의 그라프에 어떤 변환을 하여 얻을수 있는가?
   1) $y=-\cot x$  2) $y=\cot(-x)$  3) $y=-\cot(-x)$
3. $\cot\alpha<0$, $\sin\alpha>\cos\alpha$일 때 $\alpha$는 몇분구의 각인가?

### 2. $y=a\sin(bx+c)$의 그라프

반경이 3인 원둘레를 따라 점 P가 처음에 자리각이 $\frac{\pi}{3}$인 점 $P_0$에서 떠나 정방향으로 각속도 $\frac{\pi}{4}$로 회전한다. 이때 점 P에서 $x$, $y$축에 내린 수직선의 밑점 H, K의 운동방정식을 만들어보자.

점 $P_0$으로부터 $t$초후에 점 P로 돌아갔다고 하면 점 P의 자리각은

$$\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}$$

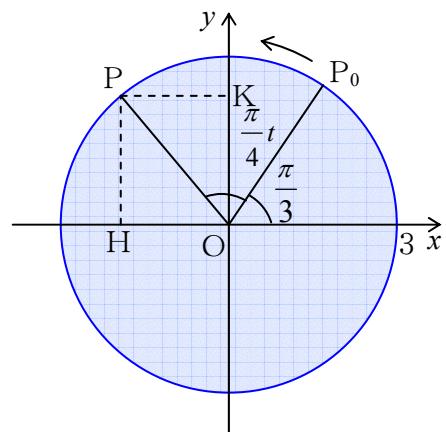



그림 2-18

이제 점 P의 자리표를 $(x, y)$라고 하면 시누스, 코시누스의 정의로부터

$$\frac{y}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{x}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

첫 식으로부터 $y=3\sin(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3})$

둘째 식으로부터

$$x=3\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)\right]=3\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{5}{6}\pi\right)$$

그런데 점 P의 $x$, $y$ 자리표는 각각 점 H의 $x$축에서의 자리표, 점 $k$의 $y$축에서의 자리표와 같다.

따라서 점 H의 운동방정식은 $x=3\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{5}{6}\pi\right)$

점 K의 운동방정식은 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$

점 H, K의 운동을 **조화진동**이라고 부른다.

이로부터 함수 $y=a\sin(bx+c)$는 조화진동을 표시한다고 말할수 있다.

**알아보기** 다음 함수들의 그라프는 $y=\sin x$의 그라프에 어떤 변환을 해야 얻을수 있는가? (그림 2-19)

1) $y=3\sin x$, $y=\frac{1}{2}\sin x$

2) $y=\sin\frac{x}{2}$, $y=\sin 3x$

3) $y=\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $y=\sin(x+3)$

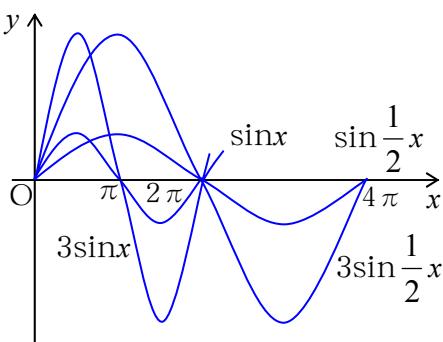
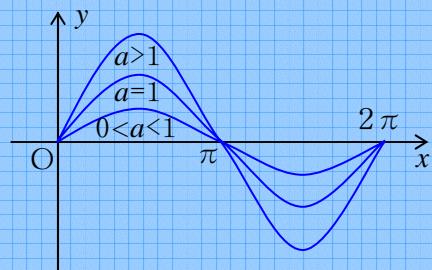
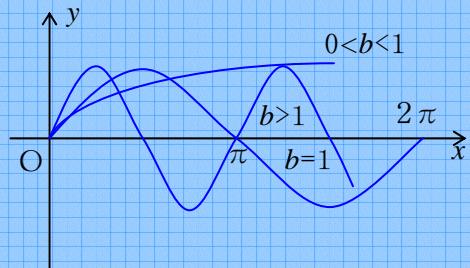
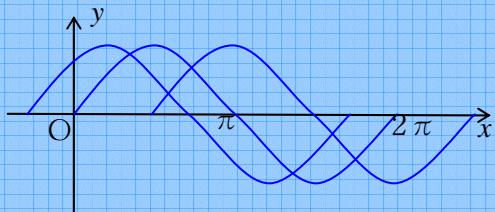



그림 2-19

$y=a\sin x$의 그라프

1) $a>0$인 경우에는 $y=\sin x$의 그라프를 $y$축방향으로의 확대($a>1$), 축소($0<a<1$)변환을 하여 얻는다.
2) $a<0$인 경우에는 $y=|a|\sin x$의 그라프를 $x$축에 관하여 대칭이동하여 얻는다.

$y=\sin bx$의 그라프

1) $b>0$인 경우에는 $y=\sin x$의 그라프를 $x$축방향으로의 확대($0<b<1$), 축소($b>1$)변환을 하여 얻는다.
2) $b<0$인 경우에 $y=\sin|b|x$의 그라프를 $y$축에 관하여 대칭이동하여 얻는다.

$y=\sin(x+c)$의 그라프

$y=\sin x$의 그라프를 $x$축방향으로 $|c|$만큼 평행이동하여 얻는다.
이때
$c>0$ : $x$축의 부방향
$c<0$ : $x$축의 정방향

례 1 함수 $y=3\sin\frac{x}{2}$의 그라프를 그려라.

(풀이) 이 함수의 그라프는 $y=\sin x$의 그라프를

① $y$축방향으로 3배 확대하여 $y=3\sin x$의 그라프를 얻고

② 다시 $x$축방향으로 2배 확대하여 얻는다.

례 2 함수 $y=\frac{1}{2}\sin(4x-0.6)$의 그라프를 그려라.

(풀이) $y=\frac{1}{2}\sin(4x-0.6)=\frac{1}{2}\sin4(x-0.15)$

이 함수의 그라프는 $y=\sin x$의 그라프를

① $y$축방향으로 $\frac{1}{2}$ 축소하여 $y=\frac{1}{2}\sin x$의 그라프를 그리고

② $x$축방향으로 $\frac{1}{4}$ 축소하여 $y=\frac{1}{2}\sin 4x$의 그라프를 얻으며

③ 다시 $x$축의 오른쪽방향으로 0.15만큼 평행이동하여 얻는다.

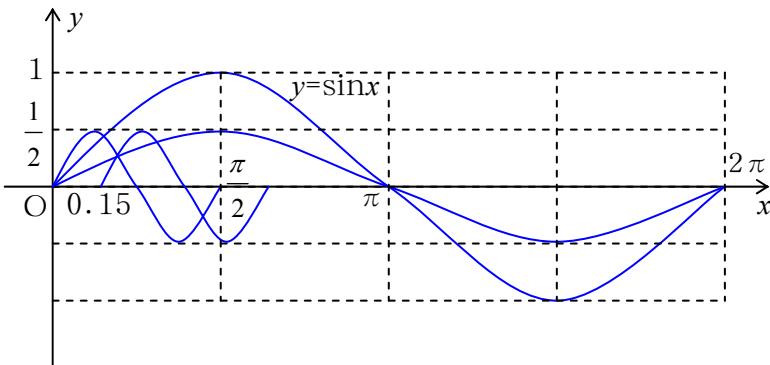



그림 2-20

## 문 제

1. 다음 함수의 그라프는 $y=\sin x$의 그라프에 어떤 변환을 하여 얻을수 있는가?

1) $y=-\frac{3}{2}\sin x$  2) $y=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  3) $y=4\sin 3x$

4) $y=\sin\left(\frac{1}{2}-x\right)$  5) $y=\sin(-5+x)$

2. 다음 함수들의 그라프를 그려라.

1) $y=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$  2) $y=2.5\sin(3x-1)$

3. 그라프가 다음과 같은 함수를 식으로 써라.

1) 곡선 $y=\sin x$를 $y$축방향으로 2배, $x$축방향으로 3배 확대하고 $x$축의 부방향으로 0.5만큼 평행이동한 곡선

2) 곡선 $y=\tan x$를 $x$축방향으로 0.2배로 축소하고 $y$축의 부방향으로 1만큼 평행이동한 곡선

**찾기** 다음 □에 알맞는 식을 써넣어라.

임의의 실수 $a$, $b$에 대하여 같기식

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

가 성립하는 각 $\varphi$가 있다.

이때 $\cos\varphi = \dfrac{\square}{\sqrt{a^2+b^2}}$ , $\sin\varphi = \dfrac{\square}{\sqrt{a^2+b^2}}$

우의 갈기식을 리용하여 함수 $y = a\sin x + b\cos x$ 의 그라프와 최대값, 최소값을 쉽게 구할수 있다.

**례 3** 함수 $y = \sin x - \cos x$ 의 그라프를 그리고 최대값, 최소값을 구하여라.

(풀이) $a=1$, $b=-1$ 이므로

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi &= \frac{-1}{\sqrt{1^2+1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \to \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

따라서 $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ 즉

$$y = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

이 함수의 그라프를 그리면

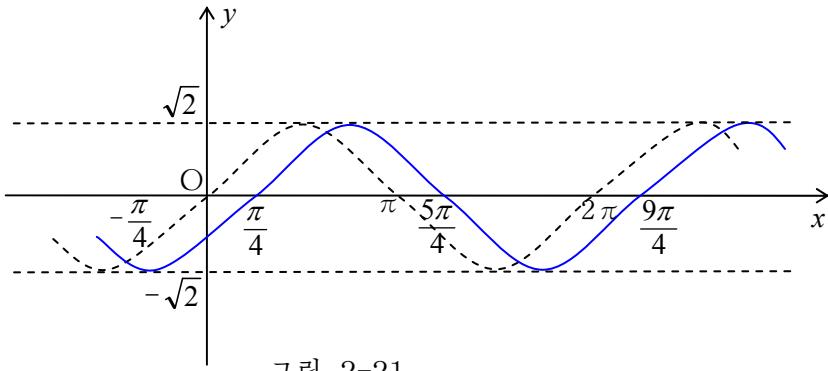



그림 2-21

최대값 $\sqrt{2}$, 최소값 $-\sqrt{2}$

## 문 제

1. 다음 함수의 최대값, 최소값을 구하여라.

   1) $y = \sin 2x - \cos 2x$  2) $y = 3\sin x - 4\cos x$  3) $y = \sqrt{7}\sin\dfrac{x}{2} - 3\cos\dfrac{x}{2}$

2. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=\sin x+\cos x$ 2) $y=4\sin x+3\cos x$

3) $y=\sin 2x+\cos 2x$ 4) $y=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$

## 련 습 문 제

1. 단위원둘레를 16등분하고 한 자리표평면에

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\tan x,\quad y=\cot x$$

의 그라프를 그려라.

2. 구간 $[-2\pi,\ 2\pi]$에서 함수가 정의되지 않는 점을 버리고 다음 함수들의 그라프를 그려라.

1) $y=|\sin x|$, $y=-1.5\sin x$, $y=\sin\frac{|x|}{\pi}$, $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

2) $y=|\cos x|$, $y=0.5\cos x$, $y=\cos\left|\frac{2x}{\pi}\right|$, $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

3) $y=|\tan x|$, $y=2\tan x$, $y=\tan\left|\frac{3x}{\pi}\right|$, $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

3. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=|\sin x|-\frac{1}{3}\sin x$ 2) $y=\sin|x|+\sin x$

4. 함수 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$가 있다. 다음의 명제에서 옳은것을 찾아라.

1) 주기는 $4\pi$이다.

2) 홀함수이다.

3) 주어진 함수는 $y=3\sin 2x$의 그라프를 왼쪽으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한것이다.

4) 구간 $\left(\frac{13}{12}\pi,\ \frac{16}{12}\pi\right)$에서 증가한다.

5. $f(x)=a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x$의 최대값과 최소값을 구하여라.

6. $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{4}{3}$일 때 $\alpha$는 몇분구의 각인가?

7. $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$의 주기를 구하여라.

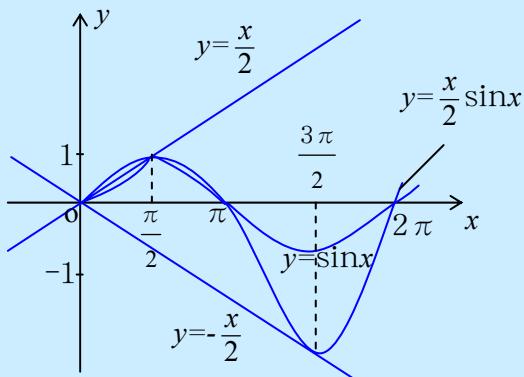
8. 다음 함수가운데서 짝함수이면서 구간 $(0,\ \pi)$에서 증가하는 함수를 찾아라.

1) $y=\tan|x|$ 2) $y=\cos(-x)$ 3) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 4) $y=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$

9. 빗변 BC=5cm인 직3각형 ABC의 정점 A에서 빗변에 높이 AD를 긋고 밑점 D에서 직각변 AB에 내린 수직선분 DE를 긋는다. BE= $y$ 를 ∠B= $\theta$ 의 함수로 표시하고 이 함수 $y=f(\theta)$의 그라프를 대강 그려라.

임의의 $x$에 대하여

$|\sin x|\le 1$이므로 $|y|=\left|\frac{x}{2}\sin x\right|\le\left|\frac{x}{2}\right|$이다.

이로부터 함수 $y=\frac{x}{2}\sin x(x\ge 0)$의 그라프를 다음과 같이 그린다.

① $y=\pm\frac{x}{2}$와 $y=\sin x(x\ge 0)$의 그라프를 그린다.

② $y=\sin x\,(x\ge 0)$의 그라프를 직선 $y=\pm\frac{x}{2}$의 사이에서 늘구거나 줄구면서 그라프를 완성한다.

이와 같은 방법으로 다음 함수의 그라프를 대강 그려라.

1) $y=-\frac{x}{2}\sin x(x\ge 0)$

2) $y=(4-x)\sin x(0\le x<4)$

3) $y=2^{x+4}\sin x$

## 제 3 절. 거꿀삼각함수

### 1. 거꿀삼각함수

**찾기** 1) 그림 2-22를 보고 같기식 $\sin x = \frac{1}{2}$에 맞는 $x$의 값들을 찾아내여라. 모두 몇개나 되는가?

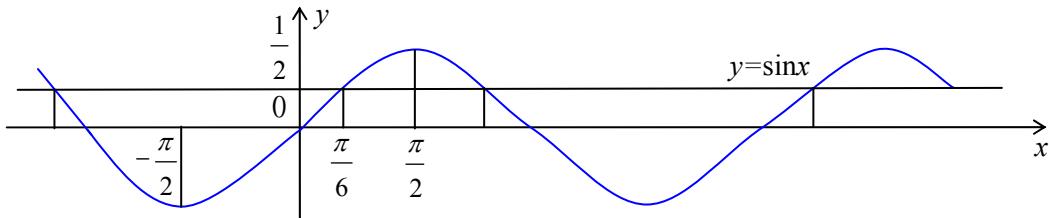



그림 2-22

2) 함수 $y = \sin x$의 증가구간과 감소구간을 찾아라.

함수 $y = \sin x$는 구간 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$에서 증가한다. 그러므로 이 구간에 $\sin x = \frac{1}{2}$인 $x$의 값은 $\frac{\pi}{6}$ 하나뿐이다.

이 값을 $\arcsin\frac{1}{2}$로 표시하고 《아크시누스 $\frac{1}{2}$》이라고 읽는다.

마찬가지로 $\sin x = 0.7\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$에 맞는 $x$의 값을 $\arcsin 0.7$로 표시한다.

일반적으로

$$\left.\begin{array}{l}\sin x = m \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\end{array}\right\} \leftrightarrow x = \arcsin m$$

《아크시누스 $m$》

**례 1** $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$을 구하여라.

(풀이) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = x$라고 하면 $\sin x = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

$\sin x = -\frac{1}{2} < 0$이므로 $x$는 4사분구의 각이고 $x = -\frac{\pi}{6}$

따라서 $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

## 문 제

다음 값을 구하여라.

1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$    2) arcsin1    3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$    4) arcsin0

**알아보기** 함수 $y=\sin x$는 구간 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $y$의 매 값에 $x$의 꼭 하나의 값이 정해진다. 왜 그런가?

그림 2-23

함수 $y=\sin x$는 구간 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$에서 증가하므로 거꿀함수를 가진다.

그것을 구하면

$$\sin x = y \left(-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x=\arcsin y \ (-1 \le y \le 1)$$

$$y=\arcsin x \ (-1 \le x \le 1)$$

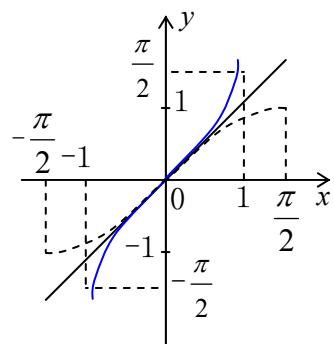
함수 $y=\sin x$의 거꿀함수 $y=\arcsin x$를 **거꿀시누스함수**라고도 부른다.

함수 $y=\arcsin x$의 그라프는 함수 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$의 그라프를 직선 $y=x$에 관하여 대칭이동하여 얻을수 있다.

## 문 제

1. 함수 $y=\arcsin x$의 뜻구역과 값구역을 말하여라.
2. 다음 식에 맞는 $x$의 값을 기호 arcsin로 표시하여라.

1) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

2) $2\sin x=0.3\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

3. 함수 $y=\arcsin x$의 그라프를 보고 다음 사실을 밝혀라.

1) $y=\arcsin x$는 증가함수이다.

2) $y=\arcsin x$는 홀함수이다.

4. $\frac{\pi}{4}$와 $\arcsin\frac{1}{2}$의 크기관계를 밝혀라.

찾기 1) 그림 2-24를 보고 같기식 $\cos x=\frac{1}{2}$에 맞는 $x$의 값들을 찾아라. 모두 몇개나 되는가?

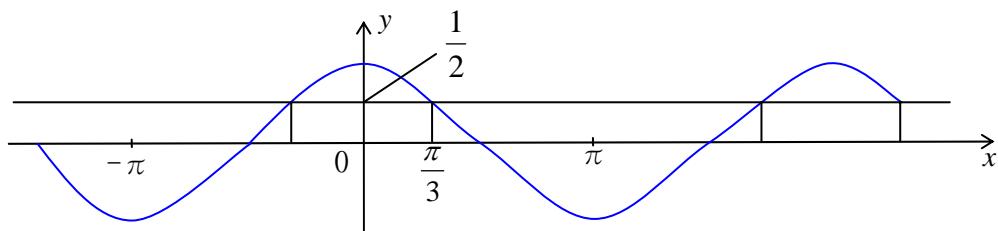



그림 2-24

2) $\cos x=\frac{1}{2}$에 맞는 $x$의 값이 꼭 하나씩 정해지는 구간을 찾아보아라.

함수 $y=\cos x$는 구간 $[0,\ \pi]$에서 감소한다.

그러므로 이 구간에서 $\cos x=\frac{1}{2}$인 $x$의 값은 $\frac{\pi}{3}$ 하나뿐이다.

이 값을 $\arccos\frac{1}{2}$로 표시하고 《아크코시누스 $\frac{1}{2}$》이라고 읽는다.

마찬가지로 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (0\le x\le\pi)$에 맞는 $x$의 값을 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$로 표시한다.

일반적으로

$$\left.\begin{array}{l}\cos x=m\\ 0\le x\le\pi\end{array}\right\}\leftrightarrow x=\arccos m$$

《아크코시누스 $m$》

례 2 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$을 구하여라.

(풀이) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=x$ 라고 하면 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (0\le x\le\pi)$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$ 이므로 $x$ 는 1사분구의 각이고 $x=\frac{\pi}{6}$

따라서 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$

## 문 제

다음 값을 구하여라.

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　2) $\arccos 1$　　3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$　　4) $\arccos 0$

**알아보기** 함수 $y=\cos x$ 는 구간 $[0,\ \pi]$ 에서 $y$ 의 매개의 값에 $x$ 의 꼭 하나의 값이 정해진다. 왜 그런가?

$y=\cos x$ 는 구간 $[0,\ \pi]$ 에서 감소하므로 거꿀함수를 가진다. 그것을 구하면

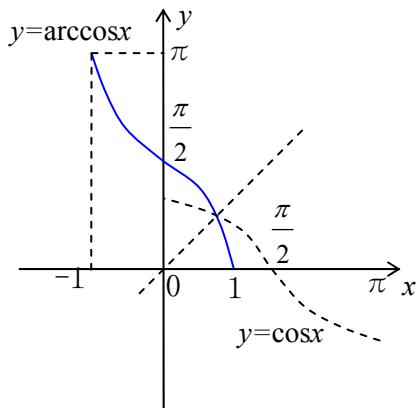
$$\cos x=y\ (0\le x\le\pi)$$
$$x=\arccos y\ (-1\le y\le 1)$$
$$y=\arccos x\ (-1\le x\le 1)$$

함수 $y=\arccos x$ 는 $y=\cos x$ 의 거꿀함수이다.

함수 $y=\arccos x$ 를 거꿀코시누스함수라고 부른다.

함수 $y=\arccos x$ 의 그라프는 $y=\cos x$ $(0\le x\le\pi)$ 의 그라프를 직선 $y=x$ 에 관하여 대칭이동하여 얻을수 있다.

그림 2-25

## 문 제

1. 함수 $y=\arccos x$ 의 뜻구역과 값구역을 말하여라.
2. 다음 식에 맞는 $x$ 의 값을 기호 arccos로 표시하여라.

1) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ (0\le x\le\pi)$　　2) $\cos x=0.9\ (0\le x\le\pi)$

3. 함수 $y=\arccos x$의 그라프를 보면서 다음 사실을 밝혀라.

1) $y=\arccos x$의 그라프는 $[-1, 1]$에서 감소한다.

2) $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$

4. 거꿀함수의 정의를 리용하여 다음 사실을 밝혀라.

1) $\sin(\arcsin x)=x,\quad x\in[-1, 1]$

2) $\cos(\arccos x)=x,\quad x\in[-1, 1]$

5. 다음것을 증명하여라.

1) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$　　2) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$

3) $\tan(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$　　4) $\cot(\arccos x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

**알아보기** 다음것이 옳은가?
갈기식 $\tan x=1$로 되는 $x$의 값은 무수히 많다. 그러나 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 드는것은 $\dfrac{\pi}{4}$ 하나뿐이다.

갈기식 $\tan x=1$에 맞는 $x$의 값들가운데서 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 드는것을

$$\arctan 1$$

과 같이 표시하고 《아크탕겐스》라고 읽는다. 그러면

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

일반적으로

$$\left.\begin{array}{l}\tan x=m\\ -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}\leftrightarrow x=\arctan m$$

《아크탕겐스 $m$ 》

함수 $y=\tan x$는 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 증가하므로 거꿀함수를 가진다.

그것을 구하면

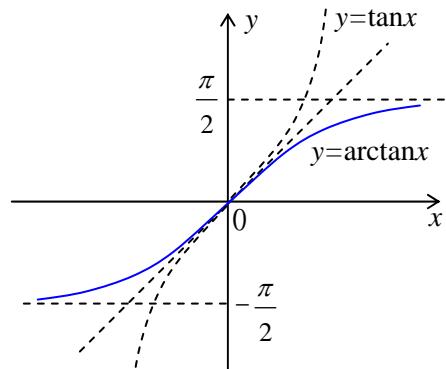
$$y=\arctan x\left(-\infty<x<+\infty,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

《거꿀탕겐스함수》

마찬가지방법으로 함수 $y=\cot x$의 거꿀함수 $y=\operatorname{arccot} x$도 이끌어낼수 있다.

거꿀탕겐스함수 $y=\arctan x\ (-\infty<x<+\infty)$의 그라프는 $y=\tan x\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그라프를 직선 $y=x$에 관하여 대칭이동하여 얻을수 있다.

그림 2-26

문 제

1. 함수 $y=\arctan x$의 그라프를 보면서 다음 사실을 밝혀라.
   1) 이 함수는 $(-\infty, +\infty)$에서 증가한다.
   2) 이 함수는 홀함수이다. 즉 $\arctan(-x)=-\arctan x$
2. 구간 $(0, \pi)$에서 함수 $y=\cot x$의 거꿀함수 $y=\operatorname{arccot} x$를 정의하여라.
3. 함수 $y=\operatorname{arccot} x$, $x\in(-\infty, +\infty)$의 그라프를 그리고 다음 사실을 밝혀라.
   1) $y=\operatorname{arccot} x$는 $(-\infty, +\infty)$에서 감소한다.
   2) $y=\operatorname{arccot} x$의 그라프는 $(-\infty, 0)$에서 볼록하고 $(0, +\infty)$에서 오목하다.
   3) $\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x$
4. 다음 같기식을 증명하여라.
   1) $\tan(\arctan x)=x$
   2) $\cot(\operatorname{arccot} x)=x$
   3) $\tan(\operatorname{arccot} x)=\dfrac{1}{x}$
   4) $\cot(\arctan x)=\dfrac{1}{x}$

## 2. 거꿀삼각함수들사이의 관계

1) 다음 □에 알맞는것을 써넣어라.

$$\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},\quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\square$$

$$\arctan\sqrt{3}+\operatorname{arccot}\sqrt{3}=\square$$

$$\arctan(-1)+\operatorname{arccot}(-1)=\square$$

2) 그라프를 보고 다음 같기식을 설명하여라.

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\qquad \arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$$

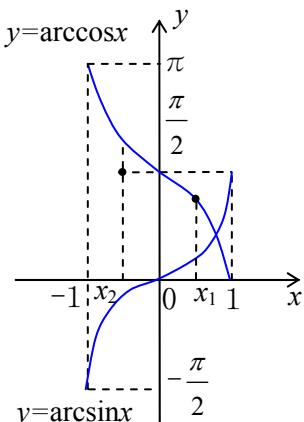



그림 2-27

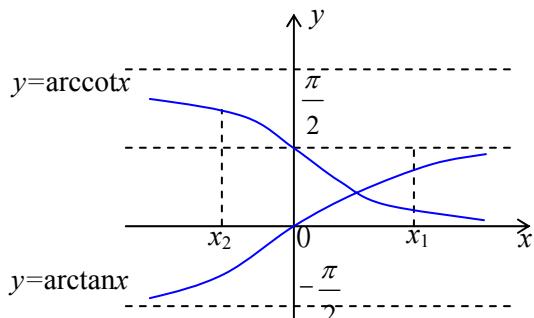



그림 2-28

**정리 1.** 임의의 $x \in [-1, 1]$ 에 대하여 다음 같기식이 성립한다.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

(증명) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$

한편 $0 \le \arccos x \le \pi$ 이므로

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \arccos x \le \frac{\pi}{2}$$

따라서 아크시누스의 정의로부터

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

**정리 2.** 임의의 $x \in (-\infty, +\infty)$에 대하여 다음 같기식이 성립한다.

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

**례 3** $\arcsin\frac{3}{5} = \arctan\frac{3}{4}$ 임을 증명하여라.

(풀이) $\arcsin\frac{3}{5} = \alpha$ 라고 하면

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

따라서 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$

그러므로 $\alpha = \arctan\frac{3}{4}$ 즉

$$\arcsin\frac{3}{5} = \arctan\frac{3}{4}$$

## 문 제

1. 정리 2를 증명하여라.
2. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\arctan\frac{1}{4} = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$

2) $\operatorname{arccot}(-\frac{1}{2}) = \pi - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$

3) $\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, & x \in [0, 1] \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0] \end{cases}$

4) $\arctan x = \begin{cases} \operatorname{arccot}\frac{1}{x}, & x \rangle 0 \\ \operatorname{arccot}\frac{1}{x} - \pi, & x \langle 0 \end{cases}$

5) $\arccos x = \begin{cases} \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in (0, 1] \\ \pi + \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in [-1, 0) \end{cases}$

3. 다음 식을 증명하여라.

1) $\arcsin\frac{40}{41} + \arccos\left(-\frac{9}{41}\right) = \pi$

2) $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

3) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$

## 련습문제

1. 다음 식을 계산하여라.

1) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$

2) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$

3) $\sin\left[\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

4) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) + \arccos\frac{7}{8}\right]$

2. $\arctan(\tan 1)$과 $\arctan 1$의 크기관계를 밝혀라.

3. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\arcsin(\cos 1)$

2) $\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4}\right)$

4. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{4} = \arctan\frac{32}{43}$

2) $2\arccos\alpha - \arccos(2\alpha^2 - 1) = 0 \quad (0 \le \alpha \le 1)$

3) $\arctan\alpha + \arctan\beta = \pi + \arctan\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \ \alpha\beta > 1)$

4) $\arctan\alpha+\arctan\beta+\arctan\gamma=\pi$ ($\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma>0$)

5) $\arctan 3^{\frac{1}{2}}-\arctan 3^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{\pi}{6}$

5. 다음 식을 변형하여라.

1) $\tan(2\arctan x)$　　2) $\cot(2\operatorname{arccot} x)$

3) $\tan(\arctan x+\arctan y)$　　4) $\tan(\arctan x-\arctan y)$

5) $\sin(\arcsin x+\arccos y)$　　6) $\cos(\arccos x-\arccos y)$

6. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\sin(\arctan x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$　　2) $\sin(\operatorname{arccot} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3) $\cos(\arctan x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　　4) $\cos(\operatorname{arccot} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

7. 다음 식을 증명하여라.

$$\arcsin\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{5\pi}{12}$$

## 제 4 절. 삼각방정식

### 1. 가장 간단한 삼각방정식

$$\sin x+\cos x=0 \quad \sin(2x+1)=-1$$

과 같이 삼각식이 들어있는 방정식을 삼각방정식이라고 부른다.

$$\sin x=m\ ,\quad \cos x=m\ ,\quad \tan x=m$$

과 같은 방정식은 가장 간단한 삼각방정식이다.

**례 1** $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 을 풀어라.

(풀이) 그림 2-29를 보면 구하려는 풀이는

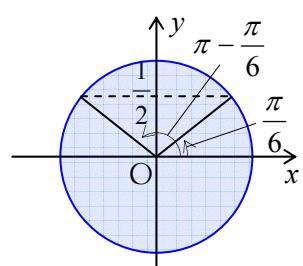
$\dfrac{\pi}{6}$ $\left(=\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{5\pi}{6}$ $\left(=\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)$

에 각각 $2k\pi$를 더한것 즉

$x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+2k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)

라는것을 알수 있다.

그림 2-29

둘째 식을 변형하면

$$x=-\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi$$

따라서 구하려는 풀이는 다음과 같다.

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

이것을 다음과 같이 쓸수도 있다.

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+n\pi$$

$\sin x=m$ $(|m|\le1)$의 풀이

$$x=(-1)^n\arcsin m+n\pi,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

**례 2** $\sin2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$를 풀어라.

(풀이) 우의 공식을 쓰면

$$2x=(-1)^n\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})+n\pi$$

$$x=\frac{1}{2}[(-1)^n(-\frac{\pi}{4})+n\pi]=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2} \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$$

## 문 제

다음 방정식을 풀어라.

1) $\sin x=-1$ 2) $\sin2x=\frac{1}{2}$ 3) $\sin3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\sin(2x-1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**례 3** $\cos x=\frac{1}{2}$을 풀어라.

(풀이) 그림 2-30을 보면 구하려는 풀이는

$$\frac{\pi}{3}\ (=\arccos\frac{1}{2}),\quad -\frac{\pi}{3}$$

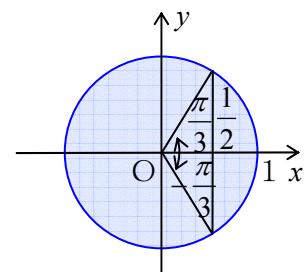
에 $2n\pi$를 더한것 즉

$$x=\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad x=-\frac{\pi}{3}+2n\pi\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

이라는것을 알수 있다.

그림 2-30

두 식을 하나로 쓰면

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$$

$\cos x = m\ (|m| \le 1)$의 풀이
$x = \pm \arccos m + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

**례 4** $\tan x = \sqrt{3}$ 을 풀어라.

(풀이) 그림 2-31을 보면 구하려는 풀이는

$$\frac{\pi}{3}\ (= \arctan\sqrt{3}),\quad \frac{\pi}{3} + \pi$$

에 각각 $2n\pi$를 더한것과 같다는것을 알수 있다. 즉

$$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\quad x = \frac{\pi}{3} + (2n+1)\pi$$

두 식을 하나로 쓰면

$$x = \frac{\pi}{3} + n\pi,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

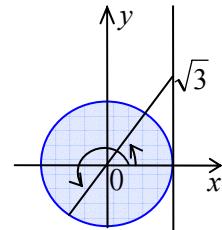



그림 2-31

$\tan x = m$ 의 풀이
$x = \arctan m + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

## 문 제

다음 방정식을 풀어라. (1-2)

1. 1) $\cos x = -1$　　2) $\cos 2x = \frac{1}{2}$
   3) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$　　4) $\cos(2x - 1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. 1) $\tan x = -1$　　2) $\cos 2x = -\sqrt{3}$
   3) $\tan 5x = \frac{1}{\sqrt{3}}$　　4) $\tan(5x - 1) = -\sqrt{3}$
3. $\cot x = m$의 풀이가 $x = \mathrm{arccot} m + n\pi$ ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)라는것을 밝혀라.
4. 다음 방정식을 풀어라.
   1) $\cot x = 1$　　2) $\cot x = -\sqrt{3}$
   3) $\cot 2x = -1$　　4) $\cot(2x + 5) = -1$

## 2. 삼각방정식의 풀이법

삼각방정식을 풀 때에는 그것을 먼저 가장 간단한 모양의 삼각방정식으로 고쳐서 푼다.

**례 1** $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$을 풀어라.

(풀이) 왼변을 변형하면

$$2(1-\cos^2 x) - 3\cos x = 0$$
$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$\cos x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$
$$(2t-1)(t+2) = 0$$
$$t = \frac{1}{2}, \quad t = -2$$

따라서 $\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -2$

첫 방정식의 풀이는 $x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2n\pi = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$

둘째 방정식의 풀이는 없다. 따라서

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in Z$$

### 문 제

다음 방정식을 풀어라.(1-2)

1. 1) $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ 2) $\tan^2 x - 6 = 5\tan x$
 3) $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$ 4) $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$
 5) $2\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 6) $5\cos 2x = 4\sin x$
 7) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$ 8) $\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$
 9) $\sin^3 + \sin^2 x = 1 + \sin x$
2. 안같기식 $\cos x \geq 0$을 만족시키는 방정식 $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 6$의 모든 풀이를 구하여라.

**례 2** 다음것을 증명하여라.

$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = (-1)^k y + k\pi, \quad k \in Z$$

(풀이) $\sin x = \sin y \Leftrightarrow \sin x - \sin y = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x+y}{2}=0 \quad \text{또는} \quad \sin\frac{x-y}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2}=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{또는} \quad \frac{x-y}{2}=k\pi,\quad k\in Z$$

이로부터 $x=-y\pm\pi+2k\pi=-y+(2k+1)\pi$ 또는 $x=y+2k\pi$

두 식을 하나로 쓰면

$$x=(-1)^k y+k\pi,\quad k\in Z$$

**례 3** $\sin x=\cos x$를 풀어라.

(풀이) $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

례 2에 의하여 $\frac{\pi}{2}-x=(-1)^k x+k\pi,\quad k\in Z$

$$(-1)^k x+x=\frac{\pi}{2}-k\pi$$

$k$가 홀수이면 왼변이 0이므로 $-k=2n$인 경우만 보자.

$$2x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

$$x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\quad n\in Z$$

[다른 방법]

$$\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=(-1)^k 0+k\pi$$

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad (k\in Z)$$

## 문 제

1. 다음것을 증명하여라.
   1) $\cos x=\cos y \Leftrightarrow x=\pm y+2k\pi,\quad k\in Z$
   2) $\tan x=\tan y \Leftrightarrow x=y+k\pi,\quad k\in Z$
2. 다음 방정식을 풀어라.
   1) $\sin 3x=-\sin 12^\circ$
   2) $\cos 2x-\cos 3^\circ=0$
   3) $\sin 4^\circ-\cos 7x=0$
   4) $\tan x=\tan 16^\circ$
   5) $\tan x=\cos x$
   6) $\cos(7x-2)=\cos(2x+1)$
   7) $\sin 3x-\cos(x-2)=0$
   8) $1-\cos 4x=2\cos^2 x$

례 4   $5\cos x - 2\sin x = \sqrt{29}$ 를 풀어라.

(풀이) $\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ 이므로

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{29}}, \quad \sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

인 $\varphi$가 있다.

그러면 주어진 방정식은

$$\cos x \cos\varphi - \sin x \sin\varphi = 1$$

$$\cos(x+\varphi) = 1$$

$$x = -\varphi + 2k\pi, \qquad k \in Z$$

여기서 $\varphi = \arccos\frac{5}{\sqrt{29}}$ (또는 $\arcsin(-\frac{2}{\sqrt{29}})$)

$$x = -\arccos\frac{5}{\sqrt{29}} + 2k\pi, \quad k \in Z$$

례 5   $2\sin x = 2 - \sin 2x - 2\cos x$를 풀어라.

(풀이) 방정식을 변형하면

$$2(\sin x + \cos x) = 2 - 2\sin x \cos x$$

$$2(\sin x + \cos x) = 2 - [(\sin x + \cos x)^2 - 1]$$

$\sin x + \cos x = t$로 표시하면

$$2t = 2 - t^2 + 1$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t + 3)(t - 1) = 0$$

$$t = -3, \quad t = 1$$

이리하여 주어진 방정식과 동등한 두 방정식

$$\sin x + \cos x = -3$$

$$\sin x + \cos x = 1$$

을 얻는다.

그런데 $|\sin x + \cos x| \le 2$이므로 첫 방정식은 풀이가 없다.

둘째 방정식을 풀면

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = [(-1)^k - 1]\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z$$

## 문 제

다음 방정식을 풀어라. (1−2)

1. 1) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　2) $3\sin 5x-4\cos 5x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $(\cos x-\sin x)(2\tan x+\sec x+2)=0$　　4) $\sin x+2\cos x=-3$

5) $\cot 3x\tan 5x=1$　　6) $\tan(x-2)\tan 5x=1$

2. 1) $\sin^2 2x=6\sin x\cos x-2$

2) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{2}\sin x\cos x$　$(\sin 2x=t)$

3) $\tan^2 x-3\cos^2 x=\cos 2x$　$(\cos x=t)$

**례 6** $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$를 풀어라.

(풀이) 왼변을 변형하면

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=2\sin x\cos x(2\cos x+1)$$

오른변을 변형하면

$$1+\cos x+\cos 2x=(1+\cos 2x)+\cos x=\cos x(2\cos x+1)$$

따라서 주어진 방정식은

$$2\sin x\cos x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1)$$

$$(2\sin x-1)\cos x(2\cos x+1)=0$$

$$\sin x=\frac{1}{2},\quad x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in Z$$

$$\cos x=0,\quad x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\cos x=-\frac{1}{2},\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

**례 7** $\log_{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=1$을 풀어라.

(풀이) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in Z$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in Z$$

## 문 제

1. 다음 방정식을 풀어라.
   1) $\sin x \cos x + \sin 2x \cos 2x - \sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x = 0$
   2) $\sin 2x \cos x \tan x = 0$
   3) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$
   4) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$
   5) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$
2. 방정식 $P\sin x + 2\cos x = 2P$가 풀이를 가지는 P를 모두 구하여라.
3. 다음 방정식을 풀어라.
   1) $\sqrt{3}\sin a^x + \cos a^x = 1$
   2) $(\cos x)^{\cos 3x + 2\cos x} = 1$

**례 8** $\arcsin x = \dfrac{\pi}{3}$를 풀어라.

(풀이) $x = \sin(\arcsin x) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**례 9** $4\arctan(x^2 - 3x + 2) - \pi = 0$을 풀어라.

(풀이) $4\arctan(x^2 - 3x + 2) = \pi$

$$\arctan(x^2 - 3x + 2) = \frac{\pi}{4}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 1$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

즉 $x = 1$, $x = 2$

**례 10** $\pi - \arcsin x = \arccos x$를 풀어라.

(풀이) $\sin(\pi - \arcsin x) = \sin(\arccos x)$

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\arccos x)$$

$$x = \sqrt{1 - x^2}$$

$$2x^2 = 1, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이것은 주어진 방정식에 맞지 않으므로 풀이는 없다.

## 문 제

다음 방정식을 풀어라. (1–4)

1. 1) $\arccos x=\frac{\pi}{3}$　　2) $\arctan x=\frac{\pi}{4}$

   3) $\text{arccot}\, x=\frac{3}{4}\pi$　　4) $\lg(\arctan x)+\lg(\text{arccot}\, x)=1$

2. 1) $6\arcsin\sqrt{x}=2\pi$　　2) $3\arccos x^2-\pi=0$

   3) $10\,\text{arccot}(3x-1)=5\pi$

3. 1) $\arctan(x+2)-\arctan(x+1)=\frac{\pi}{3}$　　2) $\arcsin x=\arctan x$

   3) $2\arcsin x=\arccos x$

4. 1) $2^{\tan(x-\frac{\pi}{4})}-2\cdot 0.25^{\frac{\sin^2(x-\frac{\pi}{4})}{\cos 2x}}=1$　　2) $\log_3\cos x+\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin x)=1$

### 3. 련립삼각방정식

**례 1** 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases}\tan x-\tan y=2\\ x+y=\pi\end{cases}$$

(풀이) 둘째 방정식에서 $y=\pi-x$를 얻고 그것을 첫째 방정식에 갈아넣으면

$$\tan x-\tan(\pi-x)=2$$

$$2\tan x=2,\ \ \tan x=1$$

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in Z$$

$$y=\pi-(\frac{\pi}{4}+k\pi)=\frac{3}{4}\pi-k\pi,\quad k\in Z$$

따라서 풀이는

$$\{(\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{3}{4}\pi-k\pi)\mid k\in Z\}$$

**례 2** 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=1\\ x+y=\pi\end{cases}$$

(풀이) 첫째 방정식을 변형하면

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

둘째 방정식을 고려하면

$$2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x-y}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$x-y=\pm\frac{2}{3}\pi+4k\pi$$

따라서 $2x=\pi\pm\frac{2}{3}\pi+4k\pi$

$$x=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$2y=\pi\mp\frac{2}{3}\pi-4k\pi$$

$$y=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{3}-2k\pi$$

그러므로 풀이는

$$\left\{\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{3}-2k\pi\right)\middle|k\in \mathrm{Z}\right\}$$

## 문 제

다음 련립방정식을 풀어라. (1–3)

1. 1) $\begin{cases}\tan x+\cot y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\tan x\cdot\tan y=2\\ x+y=\pi\end{cases}$

2. 1) $\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin y}=3\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3\sin(x-y)=6\sin x\sin y\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

3. 1) $\begin{cases} \tan x - \tan y = 2 \\ x + y = \pi \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

4. $a$가 어떤 값을 잡을 때 련립방정식이 풀이를 가지는가?

$$\begin{cases} 2\cos x\cos y\cos(x-y) = 1 \\ x + y = a \end{cases}$$

례 3 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = -\dfrac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad \left(x - y \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z\right)$$

(풀이) 두 방정식의 왼변을 변형하면

$$-\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)] = -\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \frac{3}{4}$$

즉 $\begin{cases} \cos(x+y) - \cos(x-y) = \dfrac{1}{2} \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$$2\cdot\cos(x+y) = 2, \quad \cos(x+y) = 1, \quad x + y = 2k\pi, \quad k \in Z \qquad ①$$

$$2\cdot\cos(x-y) = 1, \quad \cos(x-y) = \frac{1}{2}, \quad x - y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z \qquad ②$$

조건에서 $x - y \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ 이므로 ②는 풀이가 없다.

①로부터 $y = 2k\pi - x$

이것을 첫째 방정식에 넣으면

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}, \quad \sin x = \pm\frac{1}{2}$$

$$x=(-1)^k\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+k\pi,\quad k\in Z$$

$$y=2k\pi-[(-1)^k\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+k\pi]=(-1)^{k+1}\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+k\pi,\quad k\in Z$$

따라서 주어진 방정식의 풀이는

$$\left\{(-1)^k\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+k\pi,\ \ (-1)^{k+1}\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+k\pi \mid k\in Z\right\}$$

### 문 제

다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases}\sin x\cos y=\dfrac{1}{4}\\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

2) $\begin{cases}\tan x+\tan y=3\\ \cot x+\cot y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

3) $\begin{cases}8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0\\ x+y=a\end{cases}$

## 련 습 문 제

다음 방정식을 풀어라. (1–3)

1. 1) $\sin 6x=\sin 5x$
   2) $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$
   3) $\tan x-\tan 7x=0$
   4) $\cot 2x=\tan 3x$

2. 1) $\sin^2 x+\cos x+1=0$
   2) $\sin^2 2x-\sin^2 x=\sin^2\dfrac{\pi}{6}$
   3) $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{5}{8}$
   4) $8\sin^2 x+6\cos^2 x=13\sin 2x$

3. 1) $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=1+\sin 2x$
   2) $6\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x=2$
   3) $\sin 2x=\cos 2x-\sin^2 x+1$
   4) $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x+a=0$

4. $a$가 어떤 값을 가질 때 방정식 $1+\sin^2 a x=\cos x$는 단 하나의 풀이를 가지겠는가?

5. 구간 $[0, 270°]$에서 방정식 $1+\sin^2(270°+2x)=5\sin^2(90°+2x)$은 몇개의 각이한 풀이를 가지겠는가?

6. 방정식 $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}=a$는 $a$의 어떤 값에 대하여 풀이를 가지겠는가?

7. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} x+y=a \\ \cos x-\cos y=a \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos(x+y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(x-y)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $(0<x,\ y<\dfrac{\pi}{2})$

8. 다음 방정식을 풀어라.

1) $81^{\sin x}=9^{\frac{1}{\cos x}}$

2) $4^{\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x+5\cos x\sin x+5)}=\dfrac{1}{9}$

3) $\log_{\sin x}2\cdot\log_{\sin^2 x}3=1$

4) $\sin(\pi\lg x)+\cos(\pi\lg x)=1$

## 복 습 문 제

1. 다음과 같은 각의 도수와 라디안수를 구하여라.

1) 원에 내접한 바른$n$각형의 한 아낙각과 아낙각의 합

2) 1분에 752바퀴 도는 치차가 1초에 도는 회전각

2. 다음 삼각함수값을 구하여라.

1) $\sin 210°$

2) $\cos(-45°)$

3) $\tan 750°$

4) $\cot(-135°)$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{\cos(-\alpha)\sin(90°-\alpha)\tan(540°-\alpha)}{\sin(-\alpha)\cos(\alpha-270°)\cot(180°-\alpha)}$

2) $\dfrac{\sin(\pi+x)\tan^2(\pi-x)}{\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)}-\dfrac{\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)\sec^2(\pi-x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}$

4. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $1+\sin x+\cos x+\tan x=(1+\cos x)(1+\tan x)$

2) $(\tan^2 x-\sin^2 x)\cot^2 x=\sin^2 x$

3) $(\cos x-\sin x)(\operatorname{cosec} x-\sec x)=\sec x\operatorname{cosec} x-2$

4) $\dfrac{1-\sin x\cos x}{\cos x(\sec x-\operatorname{cosec} x)}\cdot\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\sin x$

5. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\sqrt{\sin^2 x(1+\cot x)+\cos^2 x(1+\tan x)}\ ,\ \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right)$$

6. $\tan(\alpha+\beta)=-4.3$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$를 알고 $\alpha+\beta$의 삼각함수값을 구하여라.

7. $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$일 때 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$의 값을 구하여라.

8. $\sin\alpha=\dfrac{m}{n}$일 때 $\sqrt{n^2-m^2}\tan\alpha=\pm m$이라는것을 증명하여라.

9. $\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\left[\sec\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sec\alpha\right]=\sec\alpha\sec\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-2$

를 증명하여라.

10. 다음 함수들의 그라프를 그려라.

1) $y=\sin|x|$, $y=\sin(2x+1)$

2) $y=\cos|x|$, $y=\cos 5x$, $y=\cos(3x-\pi)+1$

3) $y=\tan|x|$, $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $y=|\cot x|$

11. 질점의 운동방정식이 $x=\cos t-\sin t$, $y=\sin t\cos t$와 같이 주어졌다.

1) $t$를 없애고 $y=f(x)$와 같이 표시하여 질점의 운동곡선을 그려라.

2) $t$의 값이 $0\le t\le\pi$와 같은 범위에서 변할 때 질점은 운동곡선의 어느 범위에서 움직이겠는가?

12. $\cos x - \sin x < -1$이라면 $x$는 몇분구의 각인가?

13. 다음의 조건에 맞는 삼각함수 $f(x)$를 구하여라.

1) $f(x)$는 짝함수이다.

2) 임의의 $x \in \mathrm{R}$에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

14. $f(x)=\frac{1}{\cos x-2}$의 최대값은 M, 최소값은 N이다. 다음 식에서 옳은것은 어느 것인가?

1) M−3N=0　　2) M+3N=0　　3) 3M−N=0　　4) 3M+N=0

다음 갈기식을 증명하여라.(15−17)

15. $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

16. $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2=4\cos^2\frac{x-y}{2}$

17. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

18. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$이 성립하려면 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 사이에 어떤 관계식이 있어야 하는가?

19. 다음 방정식을 풀어라.

1) $5(\sin x+\cos x)^2-12(\sin x+\cos x)+7=0$

2) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$

3) $\sin^3 x(1+\cot x)+\cos^3 x(1+\tan x)=\cos 2x$

4) $\tan(\pi\tan x)=\cot(\pi\cot x)$

5) $\sin x-2\sin 2x+\sin 3x=|1-2\cos x+\cos 2x|$

20. 다음 방정식을 풀어라.

1) $(\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$　　2) $16^{\sin x}=\sqrt[\cos x]{4}$

21. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \cos 2x+\cos 2y=1\end{cases}$　　2) $\begin{cases}\sin x+\cos y=\sin y-\cos x+\dfrac{1}{2}\\ \sin 2x=\sin 2y+1\end{cases}$

22. 삼각함수, 삼각방정식으로 풀수 있는 물리응용문제를 만들고 풀어보아라.

연 구

$\sin x=m$ ($|m|\le 1$)로 되는 $x$의 값은 무수히 많다.

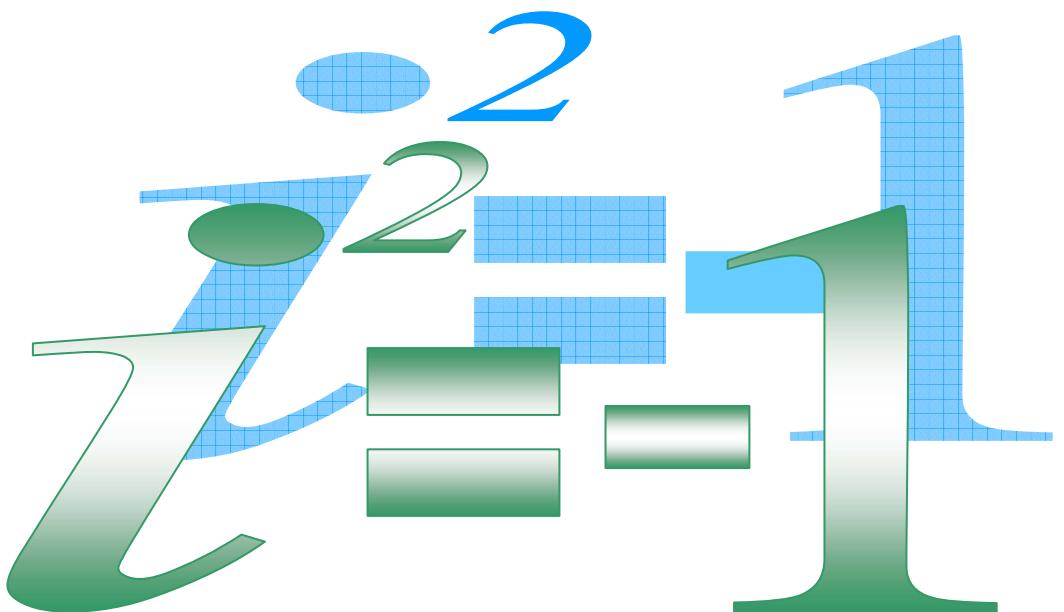
이처럼 어떤 수모임 X의 매개 값에 수모임 Y의 여러개의 값이 대응되는 경우에도 함수를 생각할수 있다. 이러한 함수를 여러값함수라고 부른다.

여러값함수를 생각하면 $y=\sin x$는 구간 $(-\infty, +\infty)$에서 거꿀함수를 가진다. 이 거꿀함수를 Arcsin$x$와 같이 표시한다.

$$y=\text{Arcsin}x,\quad x\in[-1,\ 1],\quad y\in(-\infty,\ +\infty)$$

이와 마찬가지로 함수 $y=\cos x$의 거꿀함수 Arccos$x$, 함수 $y=\tan x$의 거꿀함수 Arctan$x$를 생각할수 있다.

함수 $y=\text{Arcsin}x$, $y=\text{Arccos}x$, $y=\text{Arctan}x$ 의 그라프를 대강 그리고 그 특성을 찾아보아라.

# 제 3 장. 복소수

복소수

복소수의 산법

복소수평면

## 제 1 절. 복소수

### 1. 복소수의 의미

실수모임에서 2차방정식 $x^2+a^2=0$은 풀이를 가지지 않는다.

$$x^2+a^2=0 \quad 즉 \quad x^2=-a^2$$

모양의 방정식까지도 풀이를 가지게 하자면 2제곱한것이 부수로 되는 새로운 《수》를 받아들여야 한다.

2제곱하면 $-1$로 되는 새로운 수 $i$를 받아들여 그것을 허수의 단위라고 부른다. 즉

$$i^2=-1$$

$i$의 제곱을 실수에서와 같이 생각하면

$$i^0=1$$
$$i^1=i$$
$$i^2=-1$$
$$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$$
$$i^4=i^3\cdot i=(-i)\cdot i=-i^2=-(-1)=1$$
$$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$$
$$i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=i^2=-1$$
$$i^7=i^6\cdot i=(-1)\cdot i=-i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

일반적으로

$$i^n=\begin{cases} 1, & n=4k \\ i, & n=4k+1 \\ -1, & n=4k+2 \\ -i, & n=4k+3 \end{cases} \qquad (\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$$

**례 1** $i^{32}=i^{4\cdot 8}=1$

$i^{-25}=i^{-28+3}=i^3=-i$

**례 2** 방정식 $x^2+9=0$을 풀어라.

(풀이) $x^2+9=0$ 즉 $x^2=-9$

그런데

$$(3i)^2=9\cdot i^2=-9$$

$$(-3i)^2=9\cdot i^2=-9$$

이므로 주어진 방정식의 풀이는 $3i$와 $-3i$이다.

**례 3** 방정식 $x^2+3=0$을 풀어라.

(풀이) $x^2=-3$

그런데

$$(\sqrt{3}\,i)^2=(\sqrt{3})^2\cdot i^2=-3$$

$$(-\sqrt{3}\,i)^2=(-\sqrt{3})^2\cdot i^2=-3$$

이므로 주어진 방정식의 풀이는 $\sqrt{3}\,i$와 $-\sqrt{3}\,i$이다.

실수의 테두리에서는 부수의 2차뿌리는 없다고 하였다.

그러나 새로운 수 $i$를 써서 -9의 2차뿌리는 $\sqrt{-9}=3i$, $-\sqrt{-9}=-3i$

-3의 2차뿌리는 $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$, $-\sqrt{-3}=-\sqrt{3}\,i$와 같이 표시하기로 한다. 그러면 -1의 2차뿌리는

$$\sqrt{-1}=i,\quad -\sqrt{-1}=-i$$

일반적으로 $a$가 정수일 때 부수 $-a$의 2차뿌리는 서로 반대인 두 수 $a^{\frac{1}{2}}i$와 $-a^{\frac{1}{2}}i$이다. 즉

$$(-a)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\,i \quad 또는 \quad \sqrt{-a}=\sqrt{a}\;i$$

$$-(-a)^{\frac{1}{2}}=-a^{\frac{1}{2}}\,i \quad 또는 \quad -\sqrt{-a}=-\sqrt{a}\;i$$

## 문 제

1. 다음 수들을 $i$를 써서 표시하여라.

1) $\sqrt{-81}$　　2) $-(-0.25)^{\frac{1}{2}}$　　3) $\left(-\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$　　4) $-\sqrt{-\frac{9}{36}}$

2. 다음 계산에서 어느것이 옳은가?

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-25}=\sqrt{4}\,i\cdot\sqrt{25}\cdot i=2\cdot 5\cdot i^2=-10$$

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-25}=\sqrt{(-4)\cdot(-25)}=\sqrt{100}=10$$

3. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2+144=0$　　2) $4x^2+13=0$　　3) $x^2+\frac{3}{49}=0$

4) $4x^2+16=0$　　5) $9x^2+81=0$　　6) $x^3-x^2+x-1=0$

2차방정식 $x^2-4x+20=0$을 풀어보아라. 풀이를 어떤 모양으로 표시할수 있는가?

$(x-a)^2+b=0\ (b>0)$ 모양의 2차방정식이 풀이를 가지도록 하자면 $a\pm bi$ 모양의 새로운 수가 있어야 한다.

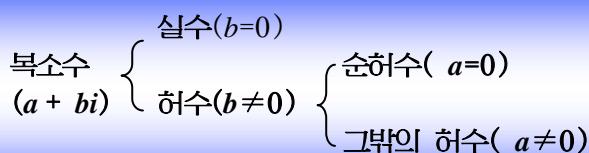
$$\alpha=a+bi\ (a,\ b\in R)$$

모양의 수를 복소수라고 부른다. 이때 $a$와 $b$를 각각 $\alpha$의 실수부, 허수부라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$a=\mathrm{Re}\,\alpha,\quad b=\mathrm{Im}\,\alpha$$

$b=0$인 복소수 $a+0i$는 실수 $a$와 같다고 본다.

$b\neq0$인 복소수 $a+bi$는 실수가 아니다. 이러한 복소수를 허수라고 부른다. 특히 $a=0$이고 $b\neq0$인 복소수 $0+bi$를 순허수라고 부른다.

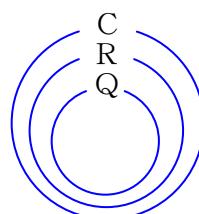
복소수 $(a+bi)$
- 실수$(b=0)$
- 허수$(b\neq0)$
  - 순허수$(a=0)$
  - 그밖의 허수$(a\neq0)$

두 복소수에서 실수부와 허수부가 각각 같으면 그 두 복소수는 같다고 말하고 같기기호 〈=〉로 표시한다.

$$a+bi=c+di\ \Leftrightarrow\ a=c,\ b=d$$

그림 3-1

그러므로 실수부나 허수부가운데 어느 하나라도 같지 않으면 두 복소수는 같지 않다.

복소수는 서로 다른 글자 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ , … 등으로 표시하여 구별한다.

복소수에서는 실수에서와 같은 크기관계를 생각하지 않는다.

유리수모임을 Q, 실수모임을 R, 복소수모임을 C로 표시하면

$$Q \subset R \subset C$$

## 문 제

1. 다음의 명제에서 옳은것과 옳지 않은것을 갈라내여라.
   1) 수 1과 수 $i$ 의 크기는 같다.
   2) 실수 $a$, $b$에 대하여 $a=0$이면 $a+bi$는 순허수이다.
   3) $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.
2. 다음 복소수의 실수부와 허수부를 갈라보아라.
   1) $\alpha=2+3i$　　2) $\alpha=1+i$
   3) $\alpha=4\frac{1}{2}$　　4) $\alpha=-\frac{1}{2}i$
3. 다음 복소수들에서 실수, 허수, 순허수를 갈라보아라.

$$3+0.5i,\quad -6,\quad -\frac{5}{2}+\frac{2}{5}i,\quad 0.12i,\quad 1\frac{2}{3},\quad -7i$$

4. 실수 $m$이 어떤 값을 가질 때 복소수 $z=m^2-5m+6+(m^2-m-2)i$가
   1) 실수　　2) 허수　　3) 순허수

   이겠는가?

### 2. 실수결수2차방정식의 풀이

결수가 실수인 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, $a, b, c\in R$)은 복소수모임 C에서 늘 풀이를 가지는가? 그 풀이를 어떻게 표시할수 있는가?

| 판별식 | 풀 이 의 개 수 | 풀 이 모 임 |
|---|---|---|
| $D>0$ | 서로 다른 실수풀이 | $\{-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a},\ -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\}$ |
| $D=0$ | 한개의 실수풀이(겹풀이) | $\{-\frac{b}{2a}\}$ |
| $D<0$ | 서로 다른 두개의 허수풀이 | $\{-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\lvert D\rvert}}{2a}i,\ -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\lvert D\rvert}}{2a}i\}$ |
| $(D=b^2-4ac)$ | | |

례 다음 방정식의 풀이를 판별하고 풀어라.

$$x^2-2x+5=0$$

(풀이) $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot5=-16<0$
이므로 방정식은 2개의 허수풀이를 가진다.
이 방정식을 풀면

$$x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{|-16|}}{2}i=1\pm2i$$

따라서 풀이모임은 $\{1+2i,\ 1-2i\}$

복소수 $\alpha=a+bi$ 에서 허수부의 부호를 반대로 바꾼 복소수 $a-bi$ 를 $\alpha$ 의 **공액복소수**라고 부르고 $\overline{\alpha}$ 로 표시한다.

이때 $\overline{a-bi}=\overline{a+(-b)i}=a-(-b)i=a+bi$ 이므로 $\alpha$ 와 $\overline{\alpha}$ 는 서로 공액인 복소수이다.

## 문 제

1. 다음 방정식을 풀어라.

1) $(x-1)^2+16=0$　　2) $(x-3)^2+25=0$

3) $x^2+2x+5=0$　　4) $x^2-x+1=0$

2. 다음 2차방정식의 풀이를 판별하고 풀어라.

1) $2x^2-x-1=0$　　2) $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$

3) $x^2-6x+10=0$　　4) $4x^2+3x-5=0$

3. 다음것을 증명하여라.

$(\overline{\overline{a+bi}})=a+bi$

4. $\alpha=\overline{\alpha}$ 이면 복소수 $\alpha$ 는 실수라는것을 밝혀라.

## 련 습 문 제

1. 다음 식을 계산하여라.

1) $i^{-28}+i^{42}$　　2) $i^{125}-(-i^{27})+i^{64}$

3) $i^{17}-(-i)^{-44}+(-i)^{86}$

2. 다음것을 구하여라.

1) $\sqrt{-225}$　　2) $-\sqrt{-\frac{4}{9}}$　　3) $-\sqrt{-13}$　　4) $\sqrt{-\frac{5}{11}}$

3. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2+7=0$　　2) $2x^2+6=0$

3) $-5x^2-25=0$　　4) $13x^2+3=0$

4. 다음 복소수의 공액복소수를 말하고 서로 공액인 두 복소수를 풀이로 가지는 2차 방정식을 만들어라.

1) $1-i$　　2) $2+3i$　　3) $-2+i$　　4) $-1-2i$

5. 다음 방정식의 풀이를 판별하고 풀어라.

1) $x^2-x-2=0$　　2) $x^2-2x+3=0$

3) $2x^2+x+1=0$　　4) $3x^2+5x+3=0$

6. 방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 풀이가 $2+i$이다. $a$, $b$를 결정하여라.

7. 방정식 $2x^4-3x^3+3x^2+77x-39=0$의 한 풀이가 $2-3i$이다. 이 방정식의 다른 풀이들을 구하여라.

## 제 2 절. 복소수의 산법

### 1. 복소수의 더하기와 덜기

**알아보기** 실수모임에서의 식의 계산규칙에 따라 다음것을 계산해보아라.

1) $(2+3i)+(-6+2i)$　　2) $(a+bi)+(c+di)$

복소수 $\alpha=a+bi$와 $\beta=c+di$의 더하기를 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

복소수의 더하기는 실수부는 실수부끼리, 허수부는 허수부끼리 더하면 된다.
복소수 $a+bi$는 두 복소수 $a+0i$와 $0+bi$의 합으로 볼수 있다.
복소수의 더하기에서도 바꿈법칙과 묶음법칙이 성립한다.

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \quad \text{(바꿈법칙)}$$
$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \quad \text{(묶음법칙)}$$

**례 1** $(7+3i)+(2-i)=(7+2)+(3-1)i=9+2i$

$(5-0.5i)+(-0.5+4i)=(5-0.5)+(-0.5+4)i=4.5+3.5i$

**례 2** $5+(-12+i)+6=(5+6)+(-12+i)=11+(-12+i)=(11-12)+i$

$=-1+i$

$(4+i)+(5-2i)+(1+2i)=[(4+i)+(5-2i)]+(1+2i)$

$=(9-i)+(1+2i)=10+i$

문 제

1. 복소수의 더하기에서 바꿈법칙이 성립한다는것을 증명하여라.
2. 복소수의 더하기에서 묶음법칙이 성립한다는것을 증명하여라.
3. 다음것을 계산하여라.

1) $\frac{1}{2}i+(4-5i)+i$　　　2) $(3-2i)+(3+2i)+(2-3i)+(2+3i)$

4. 다음 식에 맞는 $a, b$를 구하여라.

1) $(a+3i)+(0.5-bi)=3-5i$

2) $(7-bi)+(a-i)=4-2i$

3) $-7i+(a-bi)+4(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i)=i$

복소수의 덜기는 다음과 같이 정의한다.

두 복소수 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$에 대해서

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi$$

에 맞는 복소수 $z=x+yi$를 복소수 $\alpha=a+bi$에서 $\beta=c+di$를 던 차라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$z=\alpha-\beta$$

차의 정의로부터

$$(c+x)+(d+y)i=a+bi$$

$$c+x=a,\quad d+y=b$$

이로부터

$$x=a-c,\quad y=b-d$$

이리하여 두 복소수의 차는 다음과 같다.

$$\alpha-\beta=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

례 3　$(1+2i)-(3-2i)=(1-3)+(2-(-2))i=-2+4i$

$$(-9+3i)-\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i\right)=\left(-9-\frac{1}{3}\right)+\left(3+\frac{2}{3}i\right)=-9\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}i$$

$\alpha=a+bi$일 때

$$0-\alpha=(0+0i)-(a+bi)=-a-bi$$

를 간단히 $-\alpha$로 표시하면

$$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$$

이라는것을 곧 알수 있다.

복소수 $-\alpha$를 복소수 $\alpha$의 반대수라고 부른다.

례 4 1) $-5+2i$의 반대수는 $5-2i$

2) $7-\frac{1}{3}i$의 반대수는 $-7+\frac{1}{3}i$

복소수를 덜 때에는 그 반대수를 더하면 된다. 즉

$$\alpha-\beta = \alpha+(-\beta)$$

례 5 1) $(3-5i)-(-5+6i)=(3-5i)+(5-6i)=8-11i$

2) $-2i-(2-8i)=-2i+(-2+8i)=-2+6i$

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $2i-(-2+3i)+(6-7i)$

2) $-0.75-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i\right)-\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{6}i\right)$

2. 다음 식에 맞는 $a$, $b$를 구하여라.

1) $-7i-(a-bi)+4+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)=i$

2) $(-7+ai)-\left(-b+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i$

3) $(-1-0.5i)-(a+bi)+i = -0.7-1.5i$

3. $z_1=3-5i,\ z_2=-3+2i$일 때 다음 식을 만족시키는 복소수 $z$를 구하여라.

1) $z_1+z=z_2$  2) $z-z_1=z_2$  3) $z_1-z=z_2$

4. $z=a+bi$일 때 다음것을 밝혀라.

1) $z+\bar{z}=2a$  2) $z-\bar{z}=2bi$

5. 임의의 복소수 z에 대하여 다음것을 밝혀라.

$\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}z=-\frac{z-\bar{z}}{2}i$

## 2. 복소수의 곱하기와 나누기

해보기 실수모임에서의 식의 계산규칙에 따라 다음것을 계산해보아라.

1) $(2+3i)\cdot(-4+5i)$  2) $(a+bi)\cdot(c+di)$

복소수 $\alpha = a + bi$ 와 $\beta = c + di$ 의 곱하기를 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha \cdot \beta = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

례 1

1) $(2 - i) \cdot (5 + 2i) = [2 \cdot 5 - (-1) \cdot 2] + [2 \cdot 2 + (-1) \cdot 5]i = 12 - i$

2) $\left(\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \dfrac{1 + 2\sqrt{3}i - 3}{4} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

복소수의 곱하기에서도 실수모임에서의 곱하기와 같이 바꿈법칙, 묶음법칙, 분배법칙이 성립한다.

$\alpha\beta = \beta\alpha$ (바꿈법칙)

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (묶음법칙)

$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ (분배법칙)

례 2

1) $(1 + i)(3 - 5i)(1 - i) = [(1 + i)(1 - i)] \cdot (3 - 5i) = 2 \cdot (3 - 5i) = 6 - 10i$

2) $(1 - 3i)(-i) = -i + 3i^2 = -3 - i$

### 문 제

1. 복소수의 곱하기에서 바꿈법칙과 묶음법칙이 성립한다는것을 증명하여라.
2. 복소수에서 더하기와 곱하기에 관한 분배법칙이 성립한다는것을 증명하여라.
3. 다음 식에 맞는 $a$, $b$ 를 구하여라.

   1) $(a - bi)(2 - 3bi) = 1 - 5i$  2) $(5 - i)(a + bi) = 2i$

   3) $(a + 3i)(1 - bi) = 1 - i$
4. $z = a + bi$ 일 때 $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ 이라는것을 밝혀라.

복소수의 나누기는 다음과 같이 정의한다.

두 복소수 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di (\neq 0)$ 에 대해서

$(c + di)(x + yi) = a + bi$

에 맞는 복소수 $z = x + yi$ 를 $\alpha = a + bi$ 를 $\beta = c + di$ 로 나눈 상이라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$z = \frac{\alpha}{\beta}$$

상의 정의로부터

$$(cx-dy)+(cy+dx)i=a+bi$$

$$\left.\begin{aligned}cx-dy=a\\cy+dx=b\end{aligned}\right\}$$

이것을 풀면

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

이리하여 두 복소수의 상은 다음과 같다.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

례 3 1) $\frac{1+2i}{3+4i}=\frac{1\cdot3+2\cdot4}{3^2+4^2}+\frac{2\cdot3-1\cdot4}{3^2+4^2}i=\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$

2) $\frac{2+3i}{3-4i}=\frac{2\cdot3-3\cdot4}{3^2+(-4)^2}+\frac{3\cdot3+2\cdot4}{3^2+(-4)^2}i=-\frac{6}{25}+\frac{17}{25}i$

$\alpha=a+bi(\neq0)$ 일 때 복소수 $\frac{1}{\alpha}$ 을 복소수 $\alpha$ 의 **거꿀수**라고 부른다.

$$\alpha\cdot\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

이므로 복소수 $\alpha$ 의 거꿀수는 다음과 같다.

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{\alpha\,\overline{\alpha}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

례 4 1) $3+2i$ 의 거꿀수는 $\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{3^2+2^2}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$

2) $i$ 의 거꿀수는 $\frac{1}{i}=\frac{-i}{1^2}=-i$

복소수를 나눌 때에는 그 거꿀수를 곱하면 된다. 즉

$$\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}\quad(\beta\neq0)$$

복소수에서도 0으로의 나누기는 할수 없다.

례 5 1) $\frac{3-5i}{1+2i}=(3-5i)\cdot\frac{1}{1+2i}=(3-5i)\cdot\frac{1-2i}{5}=\frac{-7-11i}{5}=-\frac{7}{5}-\frac{11}{5}i$

2) $\frac{3-5i}{-5+6i}=(3-5i)\cdot\frac{1}{-5+6i}=(3-5i)\cdot\frac{-5-6i}{61}$

$$=\frac{(-15-30)+(-18+25)i}{61}=-\frac{45}{61}+\frac{7}{61}i$$

복소수의 테두리안에서는 실수에서와 같이 0으로의 나누기를 내놓고는 사칙산법의 결과도 복소수이다. 그리고 산법법칙들도 마음대로 쓸수 있다. 다만 계산하면서 $i^2$이 나오면 그것을 $-1$로 바꾸면 된다.

또한 복소수의 테두리안에서는 몇차 방정식이든지 다 풀수 있다는것이 알려져있다. 그러므로 수모임의 테두리를 넓히는 문제는 복소수모임에 이르러 한 매듭을 짓게 된다.

## 문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $\frac{-5+3i}{2i}$　　2) $\frac{1-i}{1+i}$　　3) $\frac{-3+2i}{2-i}$

2. 다음 식에 맞는 $a$, $b$를 구하여라.

1) $\frac{3-bi}{a+i}=i$　　2) $\frac{1-2i}{2a-3b}=1+2i$

3. 다음것을 계산하여라.

1) $\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}i\right)-\frac{3-i}{1-3i}$　　2) $\frac{-1+\sqrt{2}i}{3i}\cdot\frac{4}{1+\sqrt{6}i}$

4. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　　2) $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

3) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$　　4) $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ $(\beta\neq 0)$

## 련 습 문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $\left(2\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}i\right)+\left(1\frac{3}{4}+3\frac{1}{2}i\right)-\left(3-2\frac{1}{2}i\right)$

2) $(a+bi)+(5a+8bi)-(-4a-7bi)$

3) $[(x+yi)+(3x-2yi)]-[(-x-yi)-(5x-4yi)]$

2. 다음 식에 맞는 실수 $x, y$를 구하여라.

1) $-3-5i=2(x-1)+3(y-2)i$
2) $3+4xi+5yi=12i+5x-2y$
3) $(1+i)x+2(2+i)y=1+3i$
4) $2ax-3(b-4i)y=2a-4bi$

3. 다음것을 계산하여라.

1) $5i(-7i)$
2) $(-7-8i)(-3i)$
3) $(2^{\frac{1}{2}}-i)(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}i)$
4) $(-0.1+5i)(-0.1-5i)$
5) $\dfrac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$
6) $\dfrac{2i-1}{i-1}$
7) $(3-\sqrt{2}\,i)$
8) $\left(\dfrac{-1+2\sqrt{2}i}{2}\right)^2$

4. 합이 4이고 적이 $7+4i$로 되는 두개의 복소수를 구하여라.

5. $\alpha=1+\sqrt{3}\,i$일 때 $\dfrac{(2+\alpha)^2}{\alpha^3}$을 구하여라.

6. 두 복소수의 합과 적이 모두 실수이면 그 두 복소수는 실수이거나 서로 공액복소수라는것을 증명하여라.

7. $i(x+i)^4$이 실수로 되는 실수 $x$의 값을 구하여라.

8. 복소수 $z$와 $z^2$이 서로 공액복소수일 때 $z$를 구하여라.

## 제 3 절. 복소수평면

### 1. 복소수평면

실수 $a$가 수축의 점 M($a$)와 1대1로 대응되는것과 같이 복소수 $\alpha=a+bi$는 자리표평면의 점 M($a, b$)와 1대1로 대응된다.

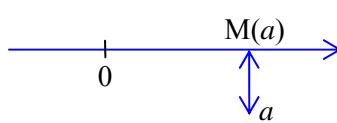



그림 3-2

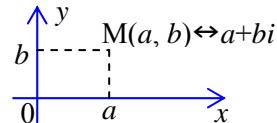



그림 3-3

해보기 1) 다음의 복소수를 자리표평면의 점으로 표시하여라.

$2-3i$, $-3+0.5i$, $2i$, $-3.5$

2) 다음의 점에는 어떤 복소수가 대응하는가?

M(3,2), N(−1, 3), P(0, 2), Q(−3, 0)

복소수는 자리표평면의 점으로, 자리표평면의 점은 복소수로 표시할수 있다.

**자리표평면의 점을 복소수로 볼 때 이 평면을 복소수평면 또는 가우스평면이라고 부른다.**

복소수평면에서 실수는 $x$축의 점으로, 순허수는 $y$축의 점으로 표시된다. 그러므로 $x$축을 **실축**, $y$축을 **허축**이라고 부른다. 점 O를 **원점**이라고 부른다.

앞으로 복소수 $\alpha$라는 말과 점 $\alpha$라는 말은 같은것으로 보기로 한다.

복소수 $\alpha = a + bi$는 또한 자리표평면에서 이 복소수를 표시하는 점 $\alpha$를 끝점, 원점 O를 첫점으로 하는 벡토르와 1대 1로 대응시킬수 있다.

복소수 $\alpha = a + bi$에 대응하는 벡토르를 복소수 $\alpha$의 **동경벡토르**라고 부른다.

점 $\alpha$와 원점사이의 거리 즉 복소수 $\alpha = a + bi$의 동경벡토르의 길이를 피다고라스의 정리에 의하여 구하면

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

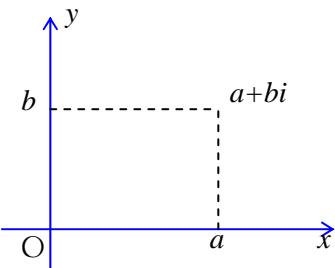
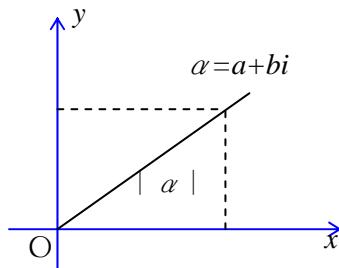



그림 3-4　　　그림 3-5

복소수 $\alpha = a + bi$에 대하여 수 $\sqrt{a^2 + b^2}$를 복소수 $\alpha$의 **절대값**이라고 부르고 $|\alpha|$와 같이 표시한다. 즉

$$|\alpha| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

령 아닌 복소수 $\alpha = a + bi$의 동경벡토르가 $x$축의 정방향과 이루는 각 $\theta$를 복소수 $\alpha$의 **편각**이라고 부르고 $\arg \alpha$와 같이 표시한다.

$$\arg \alpha = \arg(a + bi) = \theta$$

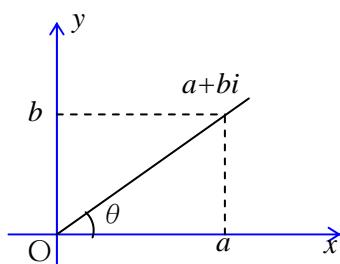



그림 3-6

**례** 1) $\alpha$가 정의 실수이면 $\arg\alpha=0$

2) $\alpha$의 허수부가 정인 순허수이면 $\arg\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

3) $\alpha$의 허수부가 부인 순허수이면 $\arg\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$

복소수 $0=0+0i$에 대해서는 아무런 각이나 다 편각으로 본다.
그러므로 $\arg 0$은 일정하게 정해지지 않는다.
복소수 $\alpha=0$은 절대값만으로 정해진다.

## 문 제

1. 다음 복소수의 절대값을 구하여라.

1) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　2) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

3) $4i$　　4) $-4i$

2. 다음 복소수의 편각을 구하여라.

1) $-6i$　　2) $0.25$　　3) $\dfrac{11}{10}i$

4) $1+i$　　5) $1-i$

3. 실수의 절대값과 이 실수를 복소수로 보고 계산한 절대값이 서로 같다는것을 밝혀라.

4. 그림을 그려서 $|a+bi|=|a-bi|$라는것을 설명하여라.

## 2. 복소수의 삼각형식

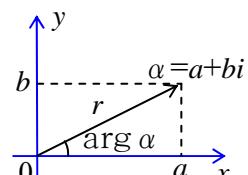
복소수 $\alpha=a+bi$의 절대값을 $r$, 편각을 $\theta$라고 하자.

그림 3-7에서 곧 알수 있는바와 같이

$$a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta$$

y
b
$\alpha=a+bi$
r
$\arg\alpha$
0
a
x

그림 3-7

따라서 복소수 $\alpha=a+bi$를 다음과 같이 표시할수 있다.

이것을 복소수 $\alpha$의 **삼각형식** 또는 **극형식**이라고 부른다.
그리고 $a+bi$를 $\alpha$의 **대수형식**이라고 부른다.
대수형식의 복소수를 삼각형식으로 고치려면

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\quad \cos\theta=\frac{a}{r},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}$$

에 의하여 절대값 $r$ 와 편각 $\theta$ 를 정하면 된다.

례 1 복소수 $1+i$ 를 삼각형식으로 고쳐라.

(풀이) $1+i$ 의 절대값은

$$r = \sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

편각은

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{이므로}$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

따라서 $1+i$ 를 삼각형식으로 고치면

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

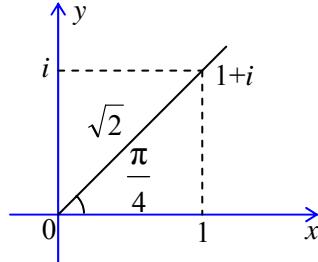



그림 3-8

례 2 순허수 $i$ 를 삼각형식으로 고쳐라.

(풀이) $i$ 의 절대값은 $r = 1$ 이고 편각은

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

따라서 $i$ 를 삼각형식으로 고치면

$$i = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

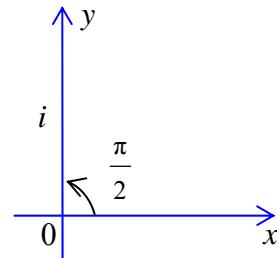



그림 3-9

## 문 제

1. 다음 복소수를 삼각형식으로 고쳐라.

1) $2i$ 2) $-1+i$ 3) 2

4) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 5) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. 다음 복소수를 대수형식으로 고쳐라.

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ 2) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

3. $\alpha\cdot\overline{\alpha} = |\alpha|^2$이라는것을 밝혀라.

## 3. 삼각형식으로 표시된 복소수의 산법

**해보기** 다음과 같이 삼각형식으로 주어진 두 복소수를 곱해보아라. 또 나누어보아라.

$$\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\quad \beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

삼각형식의 복소수를 곱할 때에는 절대값들은 곱해지고 편각들은 더해진다.

$$\alpha\beta = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

삼각형식의 복소수를 나눌 때에는 절대값들은 나누어지고 편각들은 덜어진다.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

**례 1**

1) $6(\cos 45° + i\sin 45°) \times \frac{1}{2}(\cos 15° + i\sin 15°)$

$$= \frac{6}{2}[\cos(45°+15°) + i\sin(45°+15°)] = 3(\cos 60° + i\sin 60°)$$

2) $\dfrac{0.8\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{4(\cos\pi + i\sin\pi)}$

$$= \frac{0.8}{4}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right)\right] = 0.2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

### 문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ 2) $\dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}{\cos 3\theta + i\sin 3\theta}$

2. $(\sin 9° - i\cos 9°)(\cos 13.5° + i\sin 13.5°) = A + Bi$일 때 A, B를 구하여라.

복소수의 절대값과 편각은 다음과 같은 성질을 가진다.

1) $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$, $\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta$

2) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta$

성질 1은 인수가 3개이상인 경우에도 그대로 성립한다. 즉

$$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n|=|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdots\cdot|\alpha_n|$$

$$\arg(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)=\arg\alpha_1+\arg\alpha_2+\cdots+\arg\alpha_n$$

특히

$$|\alpha^n|=|\alpha|^n,\ \arg(\alpha^n)=n\arg\alpha$$

이로부터 다음의 복소수의 $n$제곱공식을 얻는다. ($n\in\mathrm{N}$)

$$\alpha^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

이 공식을 **먀브르의 공식**이라고 부른다.

$z^n=\alpha$인 $z$를 복소수 $\alpha$의 $n$**차뿌리**라고 부르고 $z=\sqrt[n]{\alpha}$와 같이 표시한다.

**해보기** 먀브르의 공식을 리용하여 복소수의 $n$차뿌리를 구하는 공식을 만들어보아라.

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$일 때 편각에 $2\pi$의 옹근수배를 더하여도 복소수는 달라지지 않으므로 다음 공식이 나온다.

$$\sqrt[n]{\alpha}=\left\{z_k \,\middle|\, z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,\ 1,\cdots,\ n-1\right\}$$

여기서 $\sqrt[n]{r}$는 정수 $r$의 $\frac{1}{n}$제곱이다.

복소수 $\alpha$의 $n$차뿌리 $\sqrt[n]{\alpha}$는 실수의 경우와는 달리 $n$개의 $n$차뿌리전부를 표시한다.

**례 2** 복소수 $1+i$의 4차뿌리를 구하여라.

(**풀이**) $1+i$를 삼각형식으로 고치면

$$1+i=\sqrt{2}\ (\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

따라서

$$\sqrt[4]{1+i}=\left\{\sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\ \ k=0,1,\ 2,\ 3\right\}$$

$$=\left\{\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3\right\}$$

이제 $\omega=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}(=i)$로 표시하면

$$\omega^k=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}(=i^k)$$

$1+i$의 4차뿌리를 $z_k$ ($k$=0, 1, 2, 3)로 표시하면

$$z_k=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16})\,\omega^k$$

이 4개의 값을 각각 표시하면

$$z_0=\sqrt[8]{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$z_1=z_0\,\omega^1=z_0\,i$$

$$z_2=z_0\omega^2=z_0i^2=-z_0$$

$$z_3=z_0\,\omega^3=z_0i^3=-z_0i$$

## 문 제

1. 다음것을 계산하여라.

   1) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^8$

   2) $(\cos30°-i\sin30°)^{-5}$

2. 복소수 $\alpha$의 $n$차뿌리 $z_0$, $z_1$, $\cdots$, $z_{n-1}$은 복소수평면에서 원점을 중심으로 하고 반경이 $d=\sqrt[n]{r}$인 원둘레에 내접한 바른 $n$각형의 정점에 놓인다. 왜 그런가?

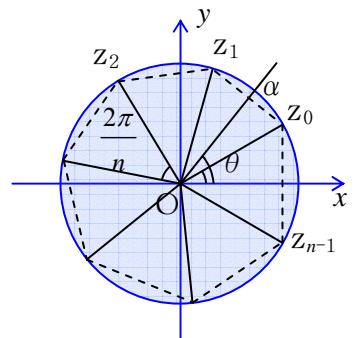



그림 3−10

**알아보기** $\beta$를 $1+i$의 한 4차뿌리라고 할 때

$$\sqrt[4]{1+i}=\left\{\beta\left(\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}\right)^k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3\right\}$$

임을 밝혀라.

복소수 $\alpha(\neq 0)$ 의 $n$차뿌리를 구할 때 그의 한 $n$차뿌리 $\beta$를 알면 다음 공식에 의하여 나머지 $n$차뿌리들을 구할수 있다.

$$\sqrt[n]{\alpha} = \left\{ z_k \middle| z_k = \beta\left( \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \right)^k, \ k = 0, 1, \cdots, n-1 \right\}$$

례 3 복소수 $64(\cos 135° + i\sin 135°)$ 의 3차뿌리를 구하여라.

(풀이) 이 복소수의 3차뿌리를 하나 구하면

$$\sqrt[3]{64}\left( \cos\frac{135°}{3} + i\sin\frac{135°}{3} \right) = 4\cos 45° + i\sin 45°$$

따라서 구하려는 3차뿌리를 $z_k$ 로 표시하면

$$z_k = 4(\cos 45° + i\sin 45°)\ \omega^k, \ (k = 0, \ 1, \ 2)$$

$$\omega = \cos 120° + i\sin 120°$$

즉 3차뿌리는

$$\{4(\cos 45° + i\sin 45°), \ 4(\cos 165° + i\sin 165°), \ 4(\cos 285° + i\sin 285°)\}$$

### 문 제

다음것을 계산하여라.

1) $\sqrt[3]{-8}$ 2) $\sqrt[3]{i}$ 3) $\sqrt[4]{i-1}$ 4) $\sqrt[5]{\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}}$

## 4. 복소수산법의 기하학적의미

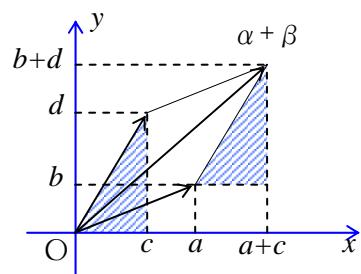
### 1) 더하기와 덜기

점 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ 의 복소수평면에서의 자리표는 각각 $(a, b)$, $(c, d)$이다.

복소수 $\alpha$ 의 동경벡토르와 $\beta$ 의 동경벡토르를 이웃한 두 변으로 하는 평행4변형에서 원점 0에서 나가는 대각선의 끝점의 자리표는 $(a+b, \ c+d)$ 이다. 이것은 그림에서 빗선을 친 3각형이 합동이라는데로부터 곧 나온다.



그림 3-11

$$(a+c) + (b+d)i = (a+bi) + (c+di) = \alpha + \beta$$

이므로 두 복소수 $\alpha$ 와 $\beta$ 의 합 $\alpha + \beta$ 는 복소수 $\alpha$ 의 동경벡토르와 $\beta$ 의 동경벡토르를 이웃한 두 변으로 하는 평행4변형의 대각선의 끝점으로 표시된다.

다음 안갈기식이 성립한다는것도 곧 알수 있다.

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$$

복소수 $\alpha$에 복소수 $\beta$를 더한다는것은 $\alpha$를 표시하는 점이 $\beta$의 동경벡토르의 방향으로 그 길이만큼 평행이동한다는것을 의미한다.

덜기는 더하기의 거꿀산법이므로 $\alpha-\beta=\gamma$라고 하면 $\beta+\gamma=\alpha$이므로 복소수 $\beta$의 동경벡토르를 한 변으로 하고 복소수 $\alpha$의동경벡토르를 대각선으로 하는 평행4변형의 이웃변의 끌점이 바로 차

$$\alpha-\beta$$

를 표시한다.

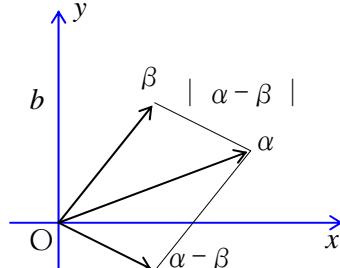



그림 3-12

## 2) 곱하기와 나누기

두 복소수 $\alpha$와 $\beta$의 적 $\alpha\beta(\alpha\neq0,\ \beta\neq0)$는 복소수 $\alpha$의 동경벡토르의 크기를 $|\beta|$배하고 $\arg\beta$만큼 회전시킨 벡토르의 끌점으로 표시된다.

이것은 복소수의 절대값과 편각의 성질 1)로부터 곧 알수 있다.

복소수 $\alpha$에 복소수 $\beta$를 곱한다는것은 $\alpha$의 동경벡토르의 크기를 $|\beta|$배하고 원점을 중심으로 $\arg\beta$만큼 정방향으로 회전한다는것을 의미한다.(그림 3-13)

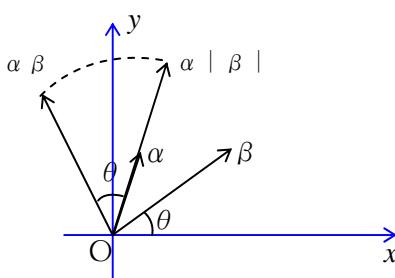



그림 3-13

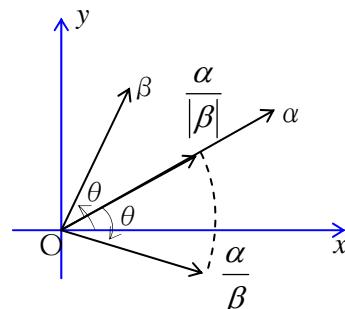



그림 3-14

두 복소수 $\alpha$와 $\beta$의 상 $\dfrac{\alpha}{\beta}(\alpha\neq0,\ \beta\neq0)$는 복소수 $\alpha$의 동경벡토르의 크기를 $\dfrac{1}{|\beta|}$배 하고 $\arg\beta$만큼 부의 방향으로 회전시킨 벡토르의 끌점으로 표시된다.(그림 3-14)

이것은 복소수의 절대값과 편각의 성질 1), 2)로부터 곧 알수 있다.

0 아닌 실수는 모두 정, 부의 부호를 가지며 실수들은 수축에 빈틈없이 늘여놓을수 있다. 또 실수들은 서로 크고작은 비교를 할수 있다.

그러나 복소수는 복소수평면에 펴놓이게 되기때문에 정, 부의 부호를 가지게 하거나 크고작은 비교를 하기 어렵다. 때문에 허수에 대해서는 정, 부의 부호를 말하지 않으며 허수와 실수, 허수와 허수사이에는 크고작은 비교를 하지 않는다.

따라서 정수, 부수라고 하면 그것은 실수이며 안같기식이 써있으면 그 두 변의 값은 실수이다.

### 문 제

1. 복소수 $\alpha$에 $i$를 곱한다는것은 $\alpha$를 표시하는 점을 원점을 중심으로 $90°$ 만큼 정방향으로 회전한다는것을 의미한다. 왜 그런가?

2. 복소수 $\alpha$에 다음 수를 곱하는것은 어떤 변환을 의미하는가?

   1) $1+i$　　　2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

3. 복소수평면에서 점 $z_1$, $z_2$를 맺는 선분의 가운데점을 구하여라.

### 련 습 문 제

1. 다음 복소수를 삼각형식으로 고쳐라.

   1) $z = 2-5i$　　　2) $z = \dfrac{4}{1+\sqrt{8}\,i}$

   3) $z = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2$

2. 다음것을 계산하여라.

   1) $\left[0.03(\cos 25° + i\sin 25°)\right]^3 \cdot \left[5(\cos 20° + i\sin 20°)\right]^2$

   2) $\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{0.3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2}$

3. $z_1$, $z_2$이 복소수일 때 다음의 명제에서 옳은것을 찾아라.

1) $|z_1|=|z_2|$이면 $z_1=\pm z_2$

2) $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)^2$

3) $|(z_1-z_2)^2|=|z_1-z_2|^2$

4) $z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}=0 \to z_1=0$, $z_2=0$

4. $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $y=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$일 때 다음 식에서 틀린것을 찾아라.

1) $x^7+y^7=-1$

2) $x^5+y^5=-1$

3) $x^6+y^6=2$

4) $x^9+y^9=-1$

5. 다음 명제에서 옳지 않은것을 찾아라.

1) $a$, $b\neq 0$인 복소수 $a+bi$의 2제곱은 순허수가 아니다.

2) 공액이 아닌 두 복소수 $z_1$, $z_2$에 대하여 $|z_1|=|z_2|$인 $z_1$, $z_2$이 있다.

3) 복소수 $z=a+bi$ ($a$, $b\neq 0$)에서 $a$, $b$의 크기가 변하면 $z$의 편각도 변한다.

6. $z=\cos\theta+i\sin\theta$일 때 $\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$이라는것을 밝혀라.

7. $z+\frac{1}{z}=2$일 때 $\frac{1}{z^2}$을 삼각형식으로 표시하여라.

8. 다음것을 계산하여라.

1) $\sqrt{\cos 22°30'+i\sin 22°30'}$

2) $z^4=3(-1+\sqrt{3}i)$ 일 때 $z=?$

9. 복소수평면에서 점 $2-i$의 동경벡토르를 3배로 늘구고 정의 방향으로 $30°$회전시켜 얻은 점은 어떤 복소수를 표시하는가?

10. 복소수평면에서 $1+5i$, $2+3i$, $-1+9i$를 표시하는 점을 각각 A, B, C라고 하자.

1) AB의 길이를 구하여라.

2) A ,B ,C가 한 직선에 놓인다는것을 밝혀라.

## 복 습 문 제

1. 다음것을 계산하여라.

   1) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \cdots \cdot i^{100}$
   2) $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{25}} - \frac{1}{i^{1023}}$

2. 다음 방정식에서 실수 $x, y$ 를 구하여라.

   1) $18 + 25i = 5(5x-2) + 100(y-10)i$
   2) $5x + 46i + 4iy + 6y = (a+b)x - (a-b)i$
   3) $(2x + yi)(x + 2yi) = 10 + 30i$

3. 다음의 조건을 만족시키는 복소수 $z = x + yi$ 를 정하여라.

   1) $z^2 = i$
   2) $z^2 - 4iz + (-4+2i) = 0$

4. 다음의 방정식을 풀어라.

   1) $2x^2 + 6x + 29 = 0$
   2) $(x+5)(x^2+64) = 0$
   3) $(x^2+2)(9x^2 - 6x + 10) = 0$

5. 복소수 $z_1, z_2$ 의 편각이 각각 $\theta_1, \theta_2$ 일 때

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

   임을 증명하여라.

6. $z = 1 - i$ 일 때 $\left| z - \frac{1}{z} \right|^2$ 의 값을 구하여라.

7. $|\alpha| = 1$, $\alpha + \beta \neq 0$일 때

$$\left| \frac{\alpha + \beta}{1 + \overline{\alpha}\beta} \right| = 1$$

   이라는것을 증명하여라.

8. $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$일 때 다음 같기식을 증명하여라.

$$|\alpha + \beta + r| = \left| \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r} \right|$$

9. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}\, i$, $z_3 = -3(i-1)$일 때 $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ 의 절대값과 편각을 구하여라.

10. 복소수평면에서 세 점 A $= 2 + 2i$, B$= 3 - 2i$, C$= -1 - i$ 를 정점으로 하는 평행4변형 ABCD의 정점 D를 표시하는 복소수를 구하여라.

11. 복소수평면에서 복소수 $z_1$, $z_2$, $z_3$을 표시하는 점을 정점으로 하는 3각형의 무게중심을 구하여라.

12. $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$일 때 $z^n + \frac{1}{z^n}$ 을 구하여라.

13. 복소수의 삼각형식을 써서 다음 식을 계산하여라.

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n$$

14. 어떤 복소수에 복소수 $1+2i$를 더하면 그 복소수를 표시하던 점은 어떻게 움직이는가?

15. 어떤 복소수에 다음 수를 곱하면 그 복소수를 표시하던 점은 어떻게 움직이는가?

1) $2i$　　2) $-2i$

16. 다음 조건에 맞는 복소수를 표시하는 점 전부는 어떤 도형을 이루는가?

1) $|a+i|=1$　　2) $|a-(i+1)|\leq 1$

17. $\arg(4+3i)=\alpha$, $\arg(3+4i)=\beta$일 때 $\cos2(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

18. $x$에 관한 방정식 $x^2+x+m=0$이 2개의 허수풀이 $\alpha$, $\beta$를 가지고 $|\alpha-\beta|=3$을 만족한다. 실수 $m$의 값을 구하여라.

**상 식**

### 19세기 수학의 《왕》-가우스

도이췰란드 수학자 가우스(1777년-1855년)는 19세기 전반에 변량수학발전에서 비약을 가져오게 한 당시 수학계의 《왕》이였다.

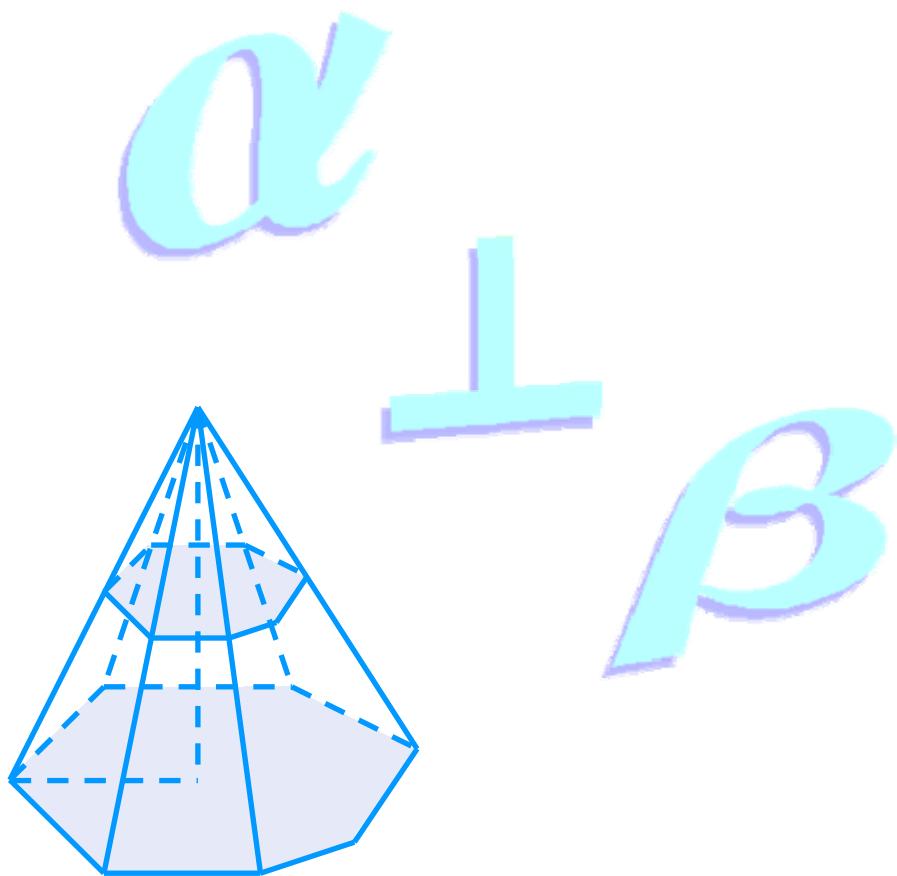
가난한 벽돌공의 아들로 태여난 그는 어려서부터 수학에 뛰여난 재능을 가지고있었다. 그는 3살 때 아버지가 돈계산을 하는것을 옆에서 보고있다가 틀린것을 발견하여 어른들을 놀라게 하였으며 소학교 3학년 때 선생님이 1부터 100까지 수들을 전부 합하면 얼마인가고 묻자 즉석에서 5 050이라고 대답하여 선생님을 깜짝 놀라게 하였다.

그는 다음과 같이 계산하였다.

$$\begin{array}{rl} S &= 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 \\ +\ S &= 100 + 99 + \cdots + 2 + 1 \\ \hline 2S &= \underbrace{101 + 101 + \cdots + 101 + 101}_{100\text{ 개}} \end{array}$$

그는 19살의 대학시절에 2 000년동안 론의되여오던 눈금없는 자와 콤파스에 의한 바른17각형의 그리기문제를 해명하였으며 22살 때 당대의 유명한 수학자들도 완전히 해명하지 못한 대수학의 기본정리 《모든 **n**차대수방정식은 적어도 하나의 복소수풀이를 가진다.》를 증명하였다.

가우스의 수학연구활동에서는 일련의 특성이 있는데 그것은 순수수학과 응용수학사이에 유기적인 련관을 지어주었다는것과 그가 쓴 책의 내용이 풍부하다는것이다.

# 제 4 장. 공간도형

공간에서 직선과 평면

다면체

회전체

투영도

## 제 1 절. 공간에서 직선과 평면

### 1. 기초명제

1) 평면도형의 기초명제을 말하여라.

2) 평면에서 세 점을 지나는 직선이 늘 있다고 말할수 있는가?
또 공간에서 세 점을 지나는 평면은 어떤가?

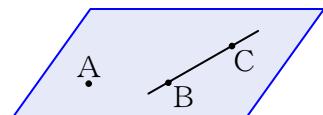
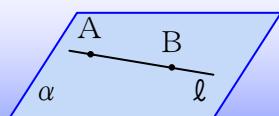
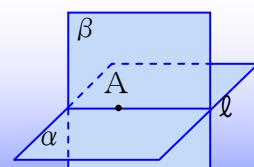
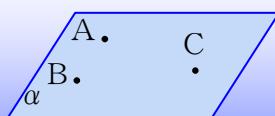



그림 4-1

**공간도형의 기초명제**

1. 직선의 두 점이 평면에 놓이면 직선은 그 평면에 완전히 놓인다.
2. 한 직선에 놓이지 않는 세 점을 지나는 평면은 있으며 다만 하나 있다.
3. 두 평면이 하나의 공통점을 가지면 그 평면들은 그 공통점을 지나는 한 직선에서 사귄다.

$\ell \subset \alpha$

$\alpha \cap \beta = \ell$

한 직선에 놓이는 세 점을 지나는 평면은 무수히 많다.

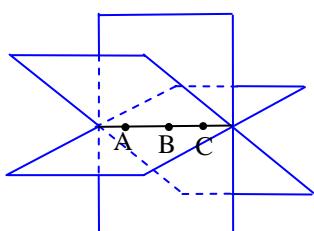



그림 4-2

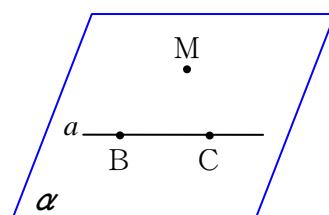



그림 4-3

**례** 직선과 그밖의 한 점을 지나는 평면은 있으며 다만 하나뿐이다.

**(풀이)** 주어진 직선 $a$의 두 점 B, C를 잡자.(그림 4-3)

그러면 기초명제 2에 의하여 B, C, M을 지나는 평면 $\alpha$는 반드시 하나 있다. 다음 기초명제 1에 의하여

$$a \subset \alpha$$

그러므로 $a$와 M을 지나는 평면은 반드시 하나 있다.

이때 M과 $a$는 평면을 결정한다고 말한다. 평면은 평행인 두 직선, 사귀는 두 직선도 결정한다는것을 증명할수 있다.

그리하여 공간도형의 기초명제로부터 다음과 같은 평면의 결정조건이 나온다.

**알아보기** 다음과 같은 자리관계밖에 다른 자리관계가 있는가를 알아보아라.

1. 공간에서 두 직선의 자리관계

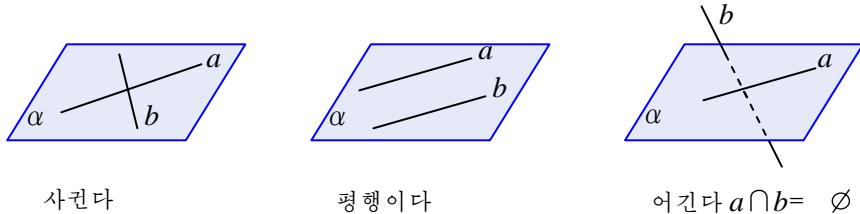



그림 4-4

2. 직선과 평면의 자리관계

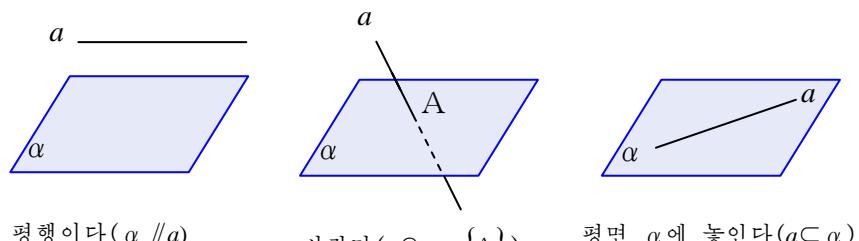



그림 4-5

3. 두 평면의 자리관계

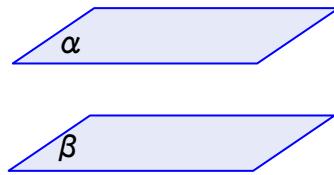
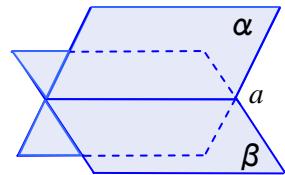



그림 4-6

## 문 제

1. 다음의 경우들은 평면을 결정하는가?
   1) 세 점이 주어진 경우　　　　2) 한 직선과 한 점이 주어진 경우
   3) 두 직선이 주어진 경우　　　4) 사귀는 두 직선이 주어진 경우
2. 다음의 명제에서 옳은것은 어느것인가?
   1) 직선의 두 점이 어떤 면에 놓이면 직선은 그 면에 완전히 놓인다.
   2) 어떤 두 면이 하나의 공통점을 가지면 그 면들은 그 공통점을 지나는 한 직선에서 사귄다.
   3) 세 평면 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$가 있다. 평면 $\alpha$와 $\beta$, $\beta$와 $\gamma$가 각각 공통점 M을 가지면 $\alpha$와 $\gamma$도 공통점 M을 가진다.
3. 한 평면에 놓여있지 않는 네 점은 그것들가운데 어느 세 점도 한 직선에 놓이지않는다. 왜 그런가?
4. 한 평면에 놓이지 않는 네 점은 몇개의 평면을 결정하는가?
5. 두 평행직선과 사귀는 직선은 두 평행직선이 결정하는 평면에 놓인다. 왜 그런가? 사귀는 두 직선과 각각 다른 점에서 사귀는 셋째 직선은 사귀는 두 직선이 결정하는 평면에 놓인다. 왜 그런가?
6. 공간에서 어기는 직선 $a, b$와 이 직선들에 놓여있지 않는 점 M이 주어졌다. 점 M을 지나서 $a$, $b$에 각각 평행인 직선들을 포함하는 평면을 구하여라.
7. 평면 $\alpha$에 직선 $a$와 점 M이 주어지고 $\alpha$밖에 점 N이 주어졌다. 점 M과 N을 지나면서 사귐선이 $a$에 수직인 평면을 구하여라.

## 2. 직선 및 평면의 평행

**알아보기** 그림 4-7에서 밑면 $BCC_1B_1$을 $\alpha$, 옆면 $D_1DCC_1$을 $\beta$라고 하고 모서리 $D_1D$, $CC_1$가 주어졌을 때

1) $D_1D \parallel \alpha$, $\alpha \cap \beta = CC_1$이면 $CC_1 \parallel DD_1$이겠는가?
2) $CC_1 \parallel DD_1$, $CC_1 \subset \alpha$ 이면 $DD_1 \parallel \alpha$ 이겠는가?

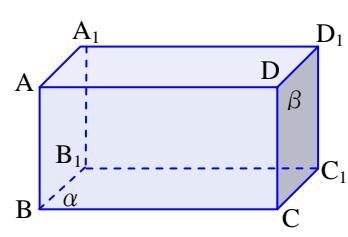



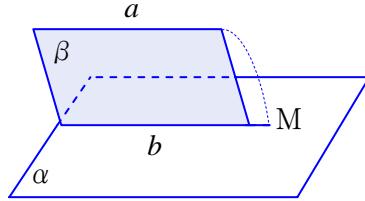
그림 4-7

**정리 1.** 직선 $a$가 평면 $\alpha$와 평행이고 $a$를 지나는 평면 $\beta$와 $\alpha$와의 사귐선이 $b$이면 $a$는 $b$와 평행이다.

**(증명)** $a \not\parallel b$이라고 가정하자. 그러면 $a, b$는 한 평면 $\beta$에 놓이면서 평행이 아니므로 사귄다.

이제 $a \cap b$ =M이라고 하면 점 M은 평면 $\alpha$의 점으로 되므로 $a$와 $\alpha$는 공통점 M을 가진다.

그림 4-8

이것은 $a // \alpha$라는 조건에 모순된다. 그러므로 $a // b$이다.(그림 4-8)

**정리 2.** 평면 $\alpha$밖에 있는 직선 $a$가 평면 $\alpha$에 놓여있는 직선 $b$와 평행이면 직선 $a$는 평면 $\alpha$와 평행이다.

**(증명)** $a \not\parallel \alpha$라고 가정하자.

그러면 $a$는 $\alpha$와 사귄다.

$a \cap \alpha$ =M이라고 하면 M은 평면 $\alpha$의 점이고 또 $a$, $b$가 결정하는 평면 $\beta$의 점이므로 $\alpha$, $\beta$의 사귐선 $b$의 점이다.

따라서 M은 $a$, $b$의 공통점이다.

이것은 $a // b$라는 조건에 모순이다.

(그림 4-9)

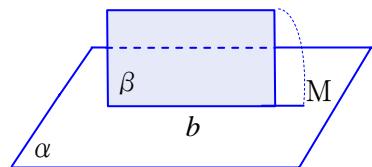



그림 4-9

**례 1** 한 직선 $c$에 각각 평행인 두 직선 $a, b$는 서로 평행이다. 왜 그런가?

**(풀이)** 직선 $a$에서 임의의 점 M을 잡고 $b$와 M, $c$와 M을 지나는 평면을 $\alpha, \beta$라고 하면 $\alpha, \beta$는 M을 지나는 직선에서 사귄다.(기초명제 3)

이 사귐선을 $a_1$이라고 하면(그림4—10)

$b // c$이므로 $b // \beta$ (정리 2)

따라서 $b // a_1$(정리 1)

$c // b$이므로 $c // \alpha$ (정리 2)

따라서 $c // a_1$(정리 1)

그런데 $c // a$ (조건)이므로 $a, a_1$은 일치한다.

(직선밖의 한 점에서 그 직선에 그은 평행선의 유일존재성)

그러므로 $b // a$

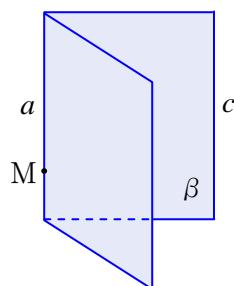



그림 4-10

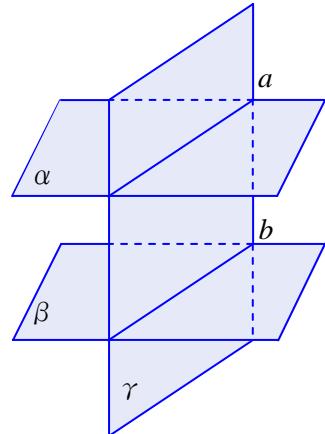
**례 2** 서로 평행인 두 직선 $a$, $b$를 각각 지나는 평면 $\alpha$, $\beta$의 사귐선 $c$는 $a$, $b$와 각각 평행이다. 증명하여라.

**(풀이)** $a // b$이므로 $a // \beta$

그리고 $a \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta = c$이므로

$$a // c$$

같은 방법으로 $b // c$라는것이 증명된다.

그림 4-11

**례 3** 두 평행평면 $\alpha, \beta$가 다른 한 평면 $\gamma$와 사귀는 선 $a, b$는 서로 평행이다. 왜 그런가?(그림 4-11)

**(풀이)** $\alpha // \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b \Rightarrow a // b$임을 밝히자.

사실 $\alpha // \beta$, $a \subset \alpha$ 이므로 $a // \beta$ 이고 $a \subset \gamma$, $\gamma \cap \beta = b$이므로 정리 1에 의하여

$$a // b$$

**례 4** 평면 $\beta$에 놓여있는 사귀는 두 직선 $a, b$가 각각 평면 $\alpha$와 평행이면 $\beta$는 $\alpha$와 평행이다. 왜 그런가?

**(풀이)** $a // \alpha$, $b // \alpha$, $a$, $b \subset \beta$, $a \not\parallel b \Rightarrow \beta // \alpha$임을 밝히자.

사실 $\beta \not\parallel \alpha$라고 가정하면 $\beta$는 $\alpha$와 사귄다.

$\beta \cap \alpha = c$라고 하면 정리 1에 의하여

$$a // c, \quad b // c$$

이것은 직선밖의 한 점을 지나면서 그 직선에 평행인 직선은 있으며 오직 하나라는 사실에 모순된다.(그림 4-12)

따라서 $\beta // \alpha$

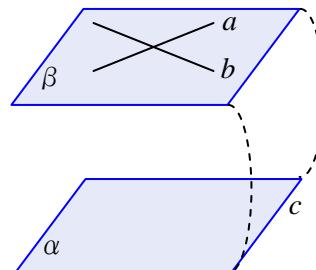



그림 4-12

## 문 제

1. 다음 명제에서 옳은것은 어느것인가?

   1) 평행이 아닌 두 평면 $\alpha$, $\beta$가 다른 한 평면 $\gamma$와 사귈 때 그 사귐선 $a$, $b$는 평행이 아니다.

   2) 평행이 아닌 두 평면밖의 한 점을 지나며 그 두 평면에 평행인 직선 $a$는 있다.

   3) 어기는 두 직선 $a$, $b$밖의 한 점 M을 지나는 평면 $\alpha$는 직선 $a$, $b$와 사귄다.

2. 두 평행평면 $\alpha, \beta$ 사이에 끼워있는 평행선분들의 길이는 같다. 왜 그런가?

3. 점 O에서 사귀는 두 직선 $a, b$와 점 $O_1$에서 사귀는 두 직선 $a_1, b_1$에서 $a // a_1$, $b // b_1$이면 $\angle(a, b) = \angle(a_1, b_1)$이거나 $\angle(a, b) + \angle(a_1, b_1) = 180°$ 이다. 왜 그런가? (여기서 $\angle(a, b)$는 두 직선 $a$, $b$ 사이의 각을 표시한다.)

4. 한 직선 $\ell$에 각각 평행인 두 평면 $\alpha, \beta$의 사귐선은 $\ell$에 평행이다. 왜 그런가?

5. 두 평면 $\alpha$와 $\beta$가 직선 $m$에서 사귄다. $CD \subset \beta$, $AB \subset \alpha$, $CD // m$, $AB \cap m = A$일 때 CD와 AB는 어기는 직선임을 증명하여라.

6. 두 평면 $\alpha$, $\beta$가 평행이고 직선 $a \subset \alpha$이다. 평면 $\beta$에 직선 $a$와 평행인 직선 $b$를 그려라.

## 3. 직선 및 평면의 수직

**알아보기** 두 직선 $a$, $b$가 어기고있다. $a$의 점 O, $O_1$에서 $b // m_1$, $b // m_2$ 되게 직선 $m_1$, $m_2$를 긋자. 각 $\theta$와 $\theta'$가 같겠는가? 또 $a$의 다른 점에서 평행직선을 긋고 생각해보아라.

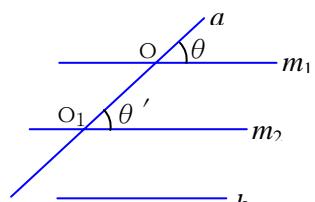



그림 4-13

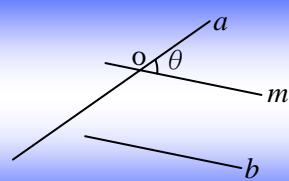
두 직선 $a$와 $b$가 어길 때 어느 한 직선 $a$의 한 점 O를 지나 $b$에 평행인 직선 $m$을 그었을 때 생기는 각 $\theta$를 어기는 두 직선 $a$, $b$사이의 각이라고 부르고 $\angle(a, b)$로 표시한다. 그리고 $\angle(a, b) = \angle R$일 때 $a$와 $b$는 수직이라고 부른다.

**례 1** 직6면체에서 모서리 AD와 $A_1B_1$은 어기는 직선이고 $\angle(AD, A_1B_1) = \angle R$ 이므로 서로 수직이다.(그림 4-14)

그림 4-14

직선 $\ell$이 평면 $\alpha$에 놓이는 모든 직선과 수직일 때 $\ell$은 $\alpha$와 **수직**이라고 부른다. 직선 $\ell$이 평면 $\alpha$와 수직일 때 $\ell$은 $\alpha$의 **수직선**, 그렇지 않을 때 $\ell$은 $\alpha$의 **빗선**이라고 부른다.

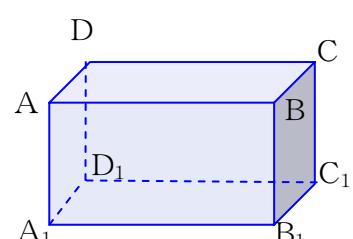
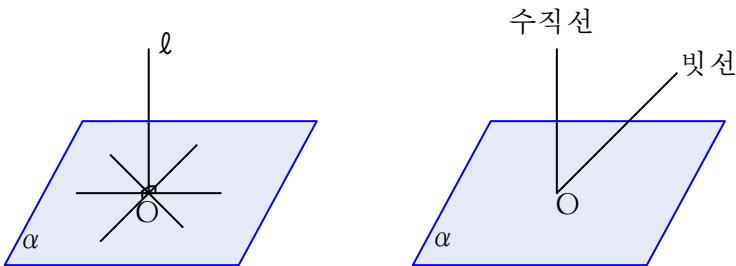



그림 4-15

평면 $\alpha$에 평행광선을 수직으로 비쳤을 때 평면 $\alpha$에 나타난 도형 F의 그림자를 도형 F의 평면 $\alpha$에 던진 **바른사영**이라고 부르고

《사영$_{\alpha}$F》 또는 $P_{r_\alpha}F$

와 같이 표시한다.

이때 평면 $\alpha$를 **사영면**이라고 부른다.

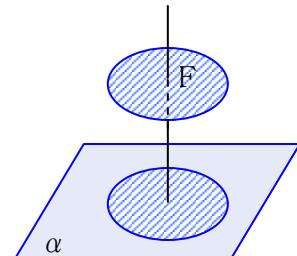



그림 4-16

**알아보기** 기둥 $BB_1$의 버팀줄 AB에 태양광선이 정오에 수직으로 비칠 때 그림자 $AB_1$이 얻어졌다. 오후 3시에 그림자가 $AB_2$로 나타났다.

1) $\angle BAB_1$과 $\angle BAB_2$가운데 어느것이 큰가?

2) AB의 모든 그림자가운데서 AB와 이루는 각이 제일 작은것은 어느것이겠는가?

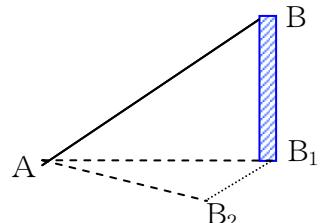
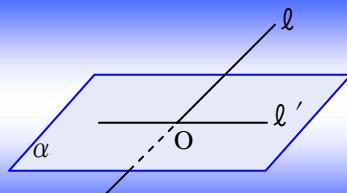



그림 4-17

빗선 ℓ의 평면 $\alpha$에 던진 바른사영을 ℓ′라고 할 때 ℓ과 ℓ′가 이루는 각을 직선 ℓ과 평면 $\alpha$가 이루는 각이라고 부른다.

평면에 놓인 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나눈다. 이때 매 부분을 **반평면**이라고 부른다.

평면은 공간을 두 부분으로 나눈다. 마찬가지로 한 직선에서 나가는 두 반평면도 공간을 두 부분으로나눈다.

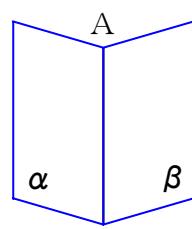
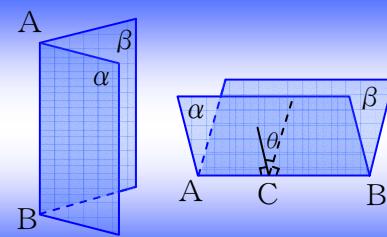



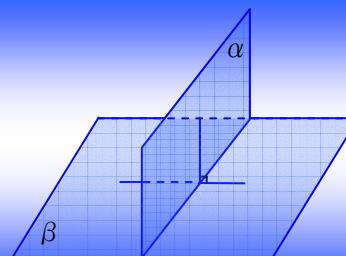
그림 4-18

한 직선으로부터 나가는 2개의 반평면과 그사이에 낀 공간부분을 2면각이라고 부른다. 여기서 공통직선을 2면각의 모서리, 반평면을 2면각의 면이라고 부르고 모서리가 AB이고 면이 $\alpha$, $\beta$인 2면각을 《2면각 AB》 또는 《2면각 $\alpha AB\beta$》와 같이 표시한다.

2면각의 모서리에서 임의로 한 점 C를 잡고 C를 지나서 모서리에 수직인 반직선을 매 면에 그었을 때 이 두 반직선이 만드는 각은 일정하다.

이 각을 주어진 **2면각의 평면각**이라고 부른다.

2면각의 크기는 그 2면각의 평면각의 크기로 표시한다.

두 평면이 이루는 2 면각의 평면각을 두 평면사이의 각이라고 부른다.

두 평면사이의 각이 직각일 때 두 평면은 서로 수직이라고 부른다.

직선 $\ell$이 평면 $\alpha$에 놓여있는 사귀는 두 직선 $a, b$와 각각 수직이면 $\ell$은 $\alpha$와 수직이라는것을 알고있다. 그리고 직선 $\ell$이 평면 $\alpha$와 수직이면 $\ell$을 지나는 평면 $\beta$가 $\alpha$와 수직이라는것도 알고있다.

이 명제의 거꿀명제도 성립한다. 즉 두 평면 $\alpha, \beta$가 수직이면 $\beta$의 점 A에서 $\alpha$에 그은 수직선은 $\beta$에 포함된다.

사실 만일 수직선이 $\beta$에 포함되지 않는다고 가정하면 $\beta$에서 점 A를 지나 사귐선 $\ell$에 수직선을 그었을 때 그것은 평면 $\alpha$와 수직이여서 결국 A를 지나며 $\alpha$에 수직인 직선이 둘이라는 모순이 생긴다.

**알아보기** 기둥 AC에 버팀줄 AB가 그림과 같이 있다. 땅바닥에 태양광선이 수직으로 비칠 때 버팀줄의 그림자 BC가 얻어졌다. 점 B에서 버팀줄에 수직인 직선 $a$는 그림자 BC에도 수직이겠는가를 생각해보아라. 거꾸로 그림자에 수직인 직선 $a$는 버팀줄에도 수직이겠는가를 생각해보아라.

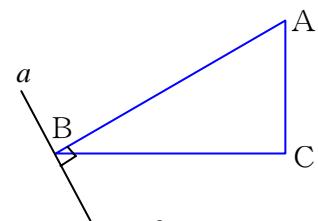



그림 4-19

**정리 3.** 사영면 $\alpha$ 에 놓인 직선 $a$ 가 빗선 $b$ 와 수직이면 직선 $a$ 는 빗선의 바른사영 $b_1$ 과도 수직이다.

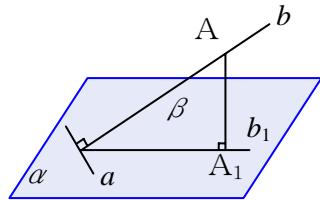
(증명) $b$ 의 한 점 A에서 $\alpha$ 에 그은 수직선의 밑점을 $A_1$ 이라고 하면 $A_1$ 은 $b_1$ 에 놓인다. (그림 4-20)

그림 4-20

$b \perp a$ (조건)이고 $AA_1 \perp \alpha$ 이므로

$$AA_1 \perp a$$

따라서 $a$ 는 $b$ 와 $AA_1$ 이 결정하는 평면 $\beta$ 와 수직이다. 그러므로 $a$ 는 $\beta$ 에 놓여 있는 직선 $b_1$ 과 수직이다. 즉

$$a \perp b_1$$

**정리 4.** 사영면 $\alpha$ 에 놓인 직선 $a$ 가 빗선 $b$ 의 바른사영 $b_1$ 와 수직이면 직선 $a$ 는 빗선 $b$ 와도 수직이다.

이것은 정리 3을 증명할 때와 꼭같은 방법으로 증명할수 있다.

이 정리들을 **세 수직선의 정리**라고 부른다.

**례 2** 평면 $\alpha$ 의 한 점 M을 지나며 $\alpha$ 에 수직인 직선을 구하여라.

**(풀이)** 평면 $\alpha$ 에서 점 M을 지나는 수직인 두 직선 $a$, $b$ 를 정한다. 평면 $\alpha$ 밖에 임의로 한 점 P를 잡고 $a$ 와 P를 지나는 평면 $\beta$ 를 얻는다. $\beta$ 에서 점 M을 지나며 $a$ 에 수직인 직선 $c$ 를 구한다.

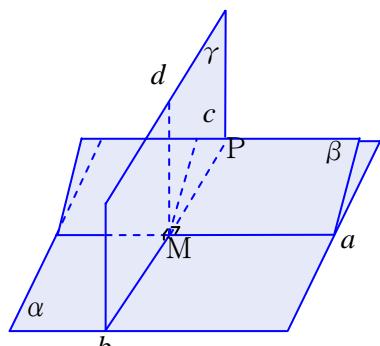
사귀는 두 직선 $b$, $c$ 가 결정하는 평면 $\gamma$ 에서 점 M을 지나며 $b$ 에 수직인 직선 $d$ 를 구한다. $d$ 는 구하려는 수직선이다. (그림 4-21)

그림 4-21

사실 $a \perp b$, $a \perp c$ 이므로 $a \perp \gamma$

따라서 $a \perp d$ 이다.

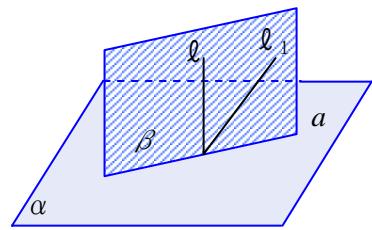
그리고 $b \perp d$ 이고 $a, b \subset \alpha$ 이므로

$$d \perp \alpha$$

**례 3** 평면 $\alpha$의 한 점을 지나며 $\alpha$에 수직인 직선은 있으며 오직 하나뿐이다. 왜 그런가?

**(풀이)** 그러한 직선이 있다는것은 례 2에서 밝혀졌다.

그림 4-22

이제 그러한 직선이 둘 있다고 가정하고 그것을 $\ell$, $\ell_1$이라고 하자. $\ell$, $\ell_1$을 지나는 평면 $\beta$와 $\alpha$와의 사귐선을 $a$라고 하면 $\angle(\ell,\ a)=\angle(\ell_1,\ a)=\angle R$이므로

$\ell$, $\ell_1$는 일치한다. 이것은 가정에 모순된다.

**례 4** 평면 $\alpha$에 수직인 두 직선 $m$, $n$은 서로 평행이다. 왜 그런가?

**(풀이)** $m \nparallel n$이라고 가정하자.

$m$, $n$이 한 평면에 놓이는 경우 $m$, $n$은 사귄다.

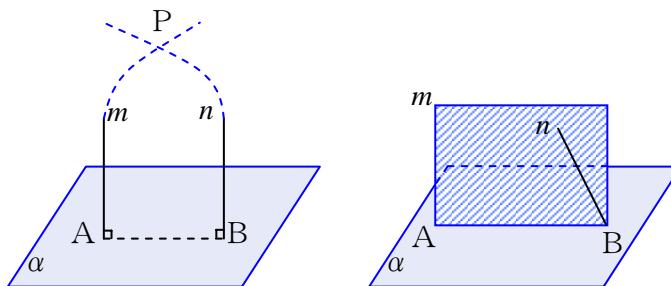



그림 4-23

$\triangle$PAB에서 $\angle$PAB=$\angle$PBA=$\angle$R이므로 이 3각형의 아낙각의 합은 180°보다 크다. 이것은 모순이다.

$m$, $n$이 한 평면에 놓이지 않는 경우 $m$, $n$은 어긴다. $m$과 B를 지나는 평면 $\beta$는 $\alpha$와 수직이고 $n$은 $\alpha$와 점 B에서 사귄다. 결국 점 B를 지나며 $\alpha$에 수직인 $n$이 점 B를 지나며 $\alpha$에 수직인 평면에 포함되지 않는다는 모순이 생긴다.

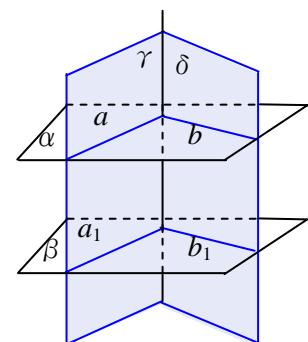
이리하여 $m//n$이라는것이 밝혀졌다.

**례 5** 직선 $\ell$이 서로 평행인 두 평면 $\alpha$, $\beta$가운데서 하나에 수직이면 다른것에도 수직이다. 왜 그런가?

그림 4-24

**(풀이)** 직선 $\ell$을 지나는 평면 $\gamma$가 $\alpha$, $\beta$와 사귀는 선을 $a$, $a_1$라고 하고 $\ell$을 지나는 다른 한 평면 $\delta$가 $\alpha$, $\beta$와의 사귐선을 $b$, $b_1$라고 하자.

$\ell \perp \alpha$이면 $\ell \perp a$, $\ell \perp b$, $\alpha // \beta$이므로

$$a // a_1,\ b // b_1$$

따라서 $\ell \perp a_1$, $\ell \perp b_1$

이리하여 $\ell \perp \beta$

**례 6** 바른6면체 $ABCDA_1B_1C_1D_1$에서 옆모서리 $AA_1$과 $CC_1$의 가운데점을M, N이라고 하면 $DB_1 \perp MN$이다. 왜 그런가?

**(풀이)** 직6면체의 옆모서리들은 밑면에 수직이므로 서로 평행이다.(그림 4-25)

그림 4-25

따라서 $AA_1 // CC_1$

그리고 두 밑면은 모서리에 수직이므로 서로 평행이다. 따라서 $AA_1, CC_1$를 지나는 평면이 두 밑면과 사귀는 선은 서로 평행이다.

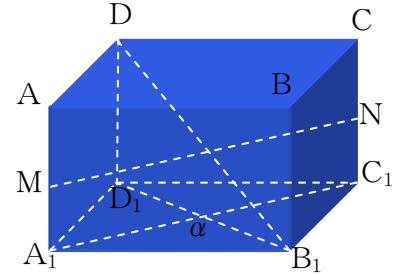
즉 $AC // A_1C_1$

또한 $AA_1$이 밑면과 수직이므로

$$AA_1 \perp A_1C_1$$

이리하여 $AA_1C_1C$는 직4각형이라는것을 알수 있다. MN은 직4각형 $AA_1C_1C$의 중간선이므로

$MN // A_1C_1$, $D_1B_1 \perp A_1C_1$, $D_1B_1$=사영$_{밑면}DB_1$이므로 $DB_1 \perp A_1C_1$

따라서 $MN \perp DB_1$

**례 7** 2면각의 한 면의 점으로부터 2면각의 모서리까지의 거리는 다른 면까지의 거리의 2배와 같다. 이 2면각의 평면각을 구하여라.

**(풀이)** 2면각 $\alpha AB\beta$의 면 $\alpha$의 점 M으로부터 모서리 AB까지 거리가 MN이면 $\beta$까지의 거리 MH의 2배라고 하자.(그림4-26)

그러면 $MN \perp AB$, HN=사영$_\beta$ MN이므로 $HN \perp AB$(세 수직선의 정리)

따라서 ∠MNH는 2면각의 평면각이다.

$MH \perp \beta$이므로 $MH \perp HN$

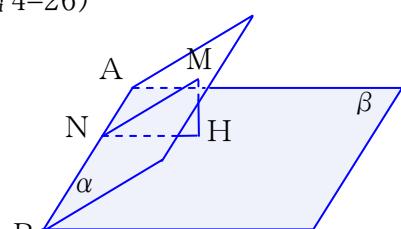
따라서 $\Delta NMH$는 직3각형이고 $\dfrac{MH}{MN} = \dfrac{1}{2}$

이므로 ∠MNH = 30°

그림 4-26

**례 8** 평면 $\alpha$와 각 $\theta$를 이루는 평면 $\beta$에 놓여있는 $\Delta ABC$를 $\alpha$에 바른사영하여 $\Delta A_1B_1C_1$을 얻었다. 이때 $S(\Delta A_1B_1C_1)=S(\Delta ABC)\cos\theta$라는것을 밝혀라.

(풀이) 평면 $\alpha, \beta$의 사귐선을 $\ell$, 평면 $AA_1B_1B$, $AA_1C_1C$가 $\ell$과 사귀는 점을 각각 M, N이라고 하자. A에서 $\ell$에 수직선 AH를 긋고 H와 $A_1$을 맺으면

$A_1H$=사영$_\alpha$ AH, AH⊥ $\ell$이므로 $A_1H \perp \ell$

$$S(\triangle A_1MN)=\frac{1}{2}MN\cdot A_1H=\frac{1}{2}MN\cdot AH\cdot\cos\theta=S(\triangle AMN)\cos\theta$$

따라서 $S(\Delta B_1MN)=S(\Delta BMN)\cos\theta$이고

$S(\Delta A_1B_1N)=S(\Delta A_1MN)-$

$S(\Delta B_1MN)=S(\Delta AMN)\cos\theta$

$-S(\Delta BMN)\cos\theta$

$=[S(\Delta AMN)-S(\Delta BMN)]$

$\cos\theta=S(\Delta ABN)\cos\theta$

즉

$S(\Delta A_1B_1N)=S(\Delta ABN)\cos\theta$

그림 4-27

그러므로 만일 BC∦$\ell$이면

$$S(\Delta B_1C_1N) = S(\Delta BCN)\cos\theta$$

이로부터 BC∦$\ell$이면

$$S(\Delta A_1B_1C_1)=S(\Delta A_1MN)-S(\Delta B_1MN)-S(\Delta B_1C_1N)$$
$$=S(\Delta AMN)\cos\theta-S(\Delta BMN)\cos\theta-S(\Delta BCN)\cos\theta$$
$$=S(\Delta ABC)\cos\theta$$

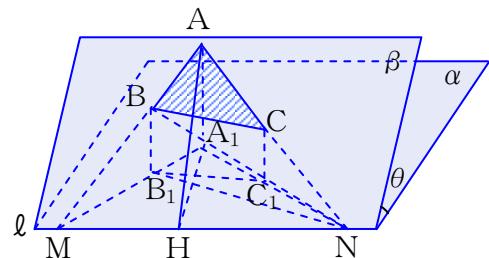
$BC /\!/ \ell$이면 $B_1C_1 /\!/ \ell$, $AH\perp BC$, $A_1H\perp B_1C_1$이므로 AH와 직선 BC와의 사귄 점을 L, 이 점의 바른사영을 $L_1$이라고 하면

$$A_1L_1 = A_1H - L_1H = AH\cos\theta - LH\cos\theta = (AH - LH)\cos\theta = AL\cos\theta$$

이고

$$S(\Delta A_1B_1C_1)=\frac{1}{2}B_1C_1\cdot A_1L_1=\frac{1}{2}BC\cdot AL\cos\theta=S(\Delta ABC)\cos\theta$$

## 문 제

1. 직선 $m$, $n$과 평면 $\alpha$, $\beta$가 있다. 다음의 명제에서 옳은것을 갈라내여라.
   1) $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, $m/\!/n \to \alpha/\!/\beta$
   2) $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, $m\perp n \to \alpha\perp\beta$
   3) $m /\!/ \alpha$, $\alpha\perp\beta \to m\perp\beta$
   4) $\alpha\perp\beta$, $m\perp\beta \to m/\!/\alpha$
2. 평면 $\alpha$, $\beta$가 직선 $\ell$에서 사귄다. 사귐선 $\ell$의 한 점 M을 지나며 평면 $\alpha$, $\beta$에 놓이는 두 반직선 $a$, $b$사이의 각이 취하는 범위는 아래의 어느 경우인가?
   1) [0°, 90°)　　2) (0°, 90°]　　3) [0°, 90°]
   4) (0°, 180°)　　5) [0°, 180°]　　6) 가능할수 없다.

3. 평면 $\alpha$와 그밖의 한 점 M이 주어졌다. M을 지나며 $\alpha$에 수직인 직선을 그려라.

4. 세 직선 $a, b, c$가 평면 $\alpha$에 놓여있다. 직선 $m$은 $a, b$와는 수직이고 $c$와는 수직이 아니다. 다음것을 밝혀라.

   1) $a$와 $b$의 자리관계　　　2) $m$과 $\alpha$의 자리관계

5. 한 직선이 평면 $\alpha$에 놓여있는 다음과 같은 두 직선과 각각 수직일 때 그 직선과 평면은 서로 수직인가?

   1) 3각형의 두 변　　2) 제형의 두 밑변　　3) 원의 두 직경

6. 두 평행평면가운데서 하나에 수직이 아닌 직선은 다른것과도 수직이 아니다. 왜 그런가?

7. □ABCD의 대각선의 사귐점 O를 지나면서 4각형평면과 사귀는 선분 OM을 MA=MC, MB=MD 되게 그었다. 이때 OM은 4각형평면에 수직이라는것을 밝혀라.

8. 직선 $\ell$이 평면 $\alpha$와 점 O에서 사귀였다. $\ell$과 $\alpha$가 이루는 각을 $\theta$라고 하자. $\alpha$에서 O를 지나는 임의의 직선을 $\ell_1$이라고 하면 $\angle(\ell, \ell_1) \geq \theta$이라는것을 증명하여라.

9. 2면각 $\alpha AB\beta$안의 한 점 M에서 $\alpha, \beta$에 그은 수직선분의 길이는 같다. 점 M에서 모서리 AB에 그은 수직선은 이 2면각을 2등분한다. 왜 그런가?

10. 빗변이 AB=9㎝인 두 직2등변3각형 ABC와 $ABC_1$이 서로 수직으로 사귀였다. $CC_1$을 구하여라.

## 련 습 문 제

1. 점 A에서 사귀는 두 직선이 있다. 점 A가 아닌 점을 지나면서 이 직선들과 동시에 사귀는 모든 직선들은 한 평면에 놓인다. 왜 그런가?

2. 주어진 직선밖의 한 점을 지나면서 이 직선과 사귀는 모든 직선들은 한 평면에 놓인다. 왜 그런가?

3. 직선 AB와 CD가 한 평면에 놓여있지 않으면 직선 AC와 BD도 한 평면에 놓여있지 않다. 증명하여라.

4. 어느 네 점도 한 평면에 놓여있지 않는 6개의 점은 몇개의 평면을 결정하는가?

5. 세 평면 $\alpha, \beta, \gamma$가 하나의 공통점 A를 가진다. 이 세 평면의 자리관계를 밝혀라.

6. 어기는 두 직선 $a, b$와 이 직선에 있지 않는 점 O가 주어졌다. O를 지나며 $a, b$에 평행인 평면을 구하여라.

7. 두 평면 $\alpha$, $\beta$가 평면 $\gamma$와 각각 평행이면 $\alpha$, $\beta$는 서로 평행이다. 증명하여라.

8. 평면 $\alpha // \alpha_1$, $\beta // \beta_1$이고 직선 $c$, $c_1$이 $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha_1 \cap \beta_1 = c_1$이면 $c // c_1$이라는것을 증명하여라.

9. 직선 $a$에서 사귀는 두 평면과 평면 $\alpha$와의 사귐선이 서로 평행이면 이 두 평면의 사귐선 $a$는 $\alpha$와 평행이다. 왜 그런가?

10. 다음 _____에 맞는것을 써넣어라.

세 평면이 $\alpha \perp \beta$, $\gamma \perp \beta$일 때 공간은 ___일 때 ___개의 부분으로 나누인다. ($\alpha \perp \gamma$, $\alpha \parallel \gamma$인 경우로 갈라서 고찰하여라.)

11. 평면 $\alpha \parallel \beta$이고 $\alpha$에 놓인 ▱ABCD의 정점들을 각각 지나는 평행직선들이 $\beta$와의 사귐점을 $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$이라고 하면 $A_1B_1C_1D_1$은 평행4변형이다. 증명하여라.

12. 점 O를 지나는 세 직선 $a$, $b$, $c$가 둘씩 서로 수직이면 이 직선들이 둘씩 결정하는 세 평면 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$는 둘씩 서로 수직이다. 왜 그런가? 그 거꿀도 성립하는가?

13. 직선 $\ell$에서 서로 수직으로 사귀는 두 평면 $\alpha$, $\beta$가 있다. 이 평면들밖의 한 점 A에서 $\alpha$, $\beta$에 그은 수직선의 밑점을 P, Q, 사귐선 $\ell$에 그은 수직선의 밑점을 R라고 하면 4각형 APRQ는 직4각형이다. 증명하여라.

14. 어기는 두 직선 $a$, $b$와 거기에 놓여있지 않는 점 A가 주어졌다. 점 A를 지나며 직선 $a$, $b$와 사귀는 직선을 구하여라.

15. 서로 수직인 두 평면에 각각 점 P, Q가 있다. 이 점으로부터 평면의 사귐선까지의 거리는 $PP_1$ =14㎝, $QQ_1$ =7㎝이다. PQ=21㎝ 일 때 $P_1Q_1$을 구하여라.

16. 공간에서

    1) 네 점이 한 평면에 있지 않는다면 이 네 점에서 어떤 세 점도 모두 한 직선에 있지 않다.

    2) 두 직선이 공통점을 가지지 않는다면 이 두 직선은 서로 다른 평면에 있는 직선이다.

    이 두 명제에서 거꿀명제가 옳은 명제로 되는것은 어느 경우인가?

## 제2절. 다면체

### 1. 각기둥

> 몇개의 다각형으로 둘러막힌 공간의 부분을 다면체라고 부른다.

다면체를 이루는 다각형을 그 다면체의 **면**, 면들이 사귀는 공통변을 **모서리**, 모서리들의 사귐점을 **정점**이라고 부른다.

한 면에 들어있지 않는 두 정점을 맺는 선분을 그 다면체의 **대각선**이라고 부른다.

다면체의 임의의 두 점을 맺는 선분이 늘 다면체에 들어있을 때 그 다면체를 **볼록다면체**, 그렇지 않으면 **오목다면체**라고 부른다.

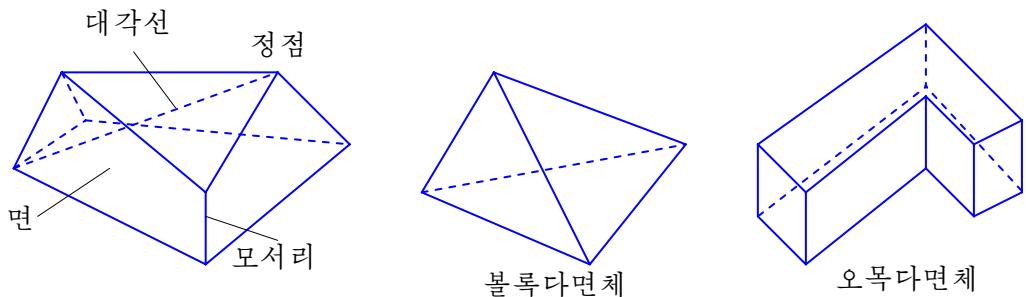



그림 4-28

다
면체라고 하면 볼록다면체를 말하는것으로 한다.

면이 $n$개인 다면체를 **$n$면체**라고 부른다.

다면체에서 면의 수가 가장 적은것은 4면체이다.

따라서 $n$면체라고 할 때 $n\geq 4$이다.

다면체가운데서 모든 면들이 합동인 바른다각형이고 매개 정점에서 나가는 모서리의 수가 같은 다면체를 **바른다면체**라고 부른다.

바른다면체에는 바른4면체, 바른6면체, 바른8면체, 바른12면체, 바른20면체 다섯가지만 있다.

**두 면은 평행이고 다른 면들은 모두 한 직선에 평행인 다면체를 각기둥이라고 부른다.**

여기서 평행인 두 면을 각기둥의 **밑면**, 한 직선에 평행인 면들을 각기둥의 **옆면**이라고 부른다.

두 옆면의 공통변을 각기둥의 **옆모서리**, 두 밑면사이의 거리를 각기둥의 **높이**라고 부른다.

밑면의 변이 $n$개인 각기둥을 **$n$각기둥**이라고 부른다.

두 밑면이 다각형 ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$인 각기둥을 각기둥 ABCDE–$A_1B_1C_1D_1E_1$과 같이 표시한다.

각기둥은 다음과 같은 성질을 가진다.

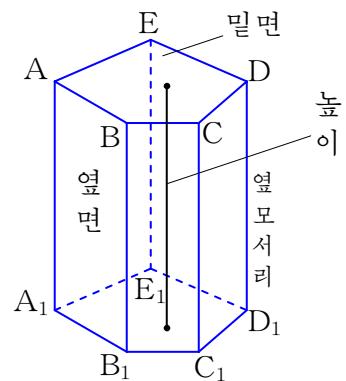



그림 4-29

**정리 1.** 1) 옆모서리들은 서로 평행이다.
2) 옆면들은 평행4변형이다.
3) 두 밑면은 합동이다.

**(증명)** 1) 직선 $\ell$에 각각 평행인 두 평면 $\alpha$, $\beta$의 사귐선은 $\ell$과 평행이다.
이로부터

$$\ell \,//AA_1,\ \ \ell\,//BB_1,\ \cdots,\ \ell\,//\,EE_1$$

따라서 $AA_1\ //BB_1\ //\ \cdots\ //EE_1$

2) $AA_1 // BB_1$ 이고 두 평행평면 ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$이 다른 한 평면 $AA_1B_1B$와 사귀여 생긴 사귐선 AB와 $A_1B_1$은 평행이다. 따라서 옆면 $AA_1B_1B$는 평행4변형이다.

다른 옆면들에 대해서도 마찬가지로 증명된다.

3) 옆면들이 평행4변형이므로

$$AB \underline{/\!/} A_1B_1, \quad BC \underline{/\!/} B_1C_1, \quad \cdots, \quad EA \underline{/\!/} E_1A_1$$

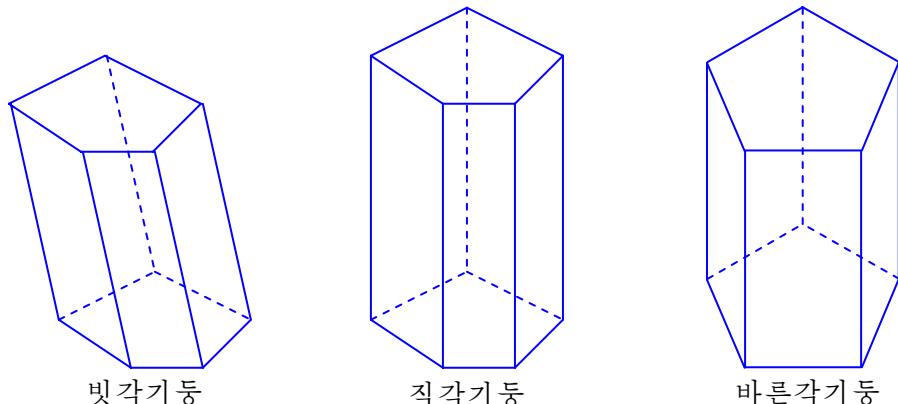
따라서

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$, $\cdots$, $\angle EAB = \angle E_1A_1B_1$

따라서 두 다각형 ABCDE와 $A_1B_1C_1D_1E_1$에서 대응하는 변과 각들이 각각 같으므로 합동이다.

옆모서리가 밑면에 수직인 각기둥을 **직각기둥**, 수직이 아닌 각기둥을 **빗각기둥**이라고 부른다.

특히 밑면이 바른다각형인 직각기둥을 **바른각기둥**이라고 부른다.

각기둥에서 한 옆면에 놓이지 않은 두 옆모서리를 지나는 평면의 자름면을 그 각기둥의 **대각선면**이라고 부른다.

빗각기둥

직각기둥

바른각기둥

그림 4-30

**탐 구**

3각기둥에서 정점수 − 모서리수 + 면의 수=2인가를 알아보아라.

변의 수 $n$에 대하여 수학적귀납법을 써서 모든 각기둥에서

정점수 − 모서리수 + 면의 수 = 2

라는것을 증명할수 있는가?

$n$ 각기둥을 $n-1$ 각기둥으로 넘기고 생각한 다음 다시 $n$ 각기둥으로 넘기면서 정점수 − 모서리수 + 면의 수를 계산하여라.

## 문 제

1. 다음것은 어떤 도형인가?
   1) 직각기둥의 옆면　　　　　　　　　　2) 바른각기둥의 옆면
2. 빗각기둥의 대각선면은 평행4변형이고 직각기둥의 대각선면은 직4각형이다. 왜 그런가?
3. 각기둥을 밑면에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 밑면과 합동이다. 증명하여라.
4. 각기둥을 옆모서리에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 평행4변형이다. 증명하여라.
5. 다음 명제에서 옳은것은 어느것인가?.
   1) 옆면들이 다 직4각형이며 린접한 두 옆면사이의 각이 다 같은 각기둥은 바른각기둥이다.
   2) 밑면에 평행인 임의의 자름면이 밑면과 합동이면 그 도형은 각기둥이다.
   3) 3각기둥의 임의의 자름면은 3각형과 4각형이다.
   4) 4각기둥의 대각선면은 6개이다.
6. 빗3각기둥의 옆모서리의 길이는 8, 옆모서리와 밑면이 이루는 각은 60°, 매 옆모서리사이의 거리는 각각 3, 4, 5이다. 이 각기둥의 체적 및 겉면적을 구하여라.

### 2. 평행6면체

**밑면이 평행 4 변형인 각기둥을 평행 6 면체라고 부른다.**

평행6면체가운데서 옆모서리가 밑면에 수직인것을 **직평행6면체**, 수직이 아닌것을 **빗평행6면체**라고 부른다.

특히 밑면이 직4각형인 직평행6면체를 **직6면체**라고 부른다.

바른6면체는 모서리들이 다 같은 직6면체이다.

정리 1에 의하여 평행6면체는 다음과 같은 성질을 가진다.

① 평행6면체의 모든 면은 평행4변형이다.

② 직평행6면체의 옆면들은 직4각형이다.

③ 직6면체의 모든 면은 직4각형이다.

④ 바른6면체의 모든 면은 합동인 바른4각형이다.

평행6면체는 이밖에도 다음과 같은 성질을 가진다.

**정리 2. 1) 맞은 변들은 평행이며 합동이다.**
**2) 대각선들은 모두 한 점에서 사귀고 그 점에서 2 등분된다.**

(증명) 1) 정리 1에 의하여 두 밑면은 평행이며 합동인 평행4변형이다.

맞은면들을 고찰하자. $AA_1D_1D$와 $BB_1C_1C$에서

$AA_1//BB_1$, $AD//BC$ 이므로

면 $AA_1D_1D$ // 면 $BB_1C_1C$, $\angle A_1AD=\angle B_1BC$

그리고 $AA_1=BB_1$, $AD=BC$이므로

$\square AA_1D_1D \equiv \square BB_1C_1C$

마찬가지로 맞은면 $AA_1B_1B$와 $DD_1C_1C$가 평행이며 합동이라는것을 밝힐수 있다.

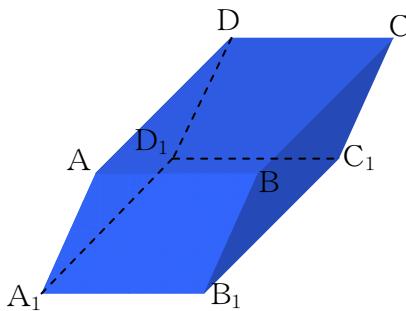
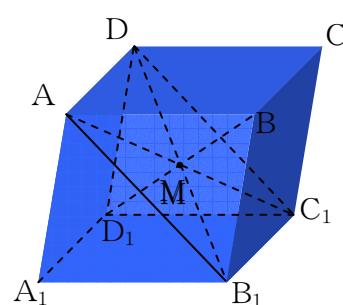



그림 4-31　　　　그림 4-32

2) AD와 $B_1C_1$은 각각 $A_1D_1$과 평행이므로 $ADC_1B_1$은 한 평면에 놓인다. 이 4각형에서 $AD \underline{//} A_1D_1 \underline{//} B_1C_1$이므로 4각형 $ADC_1B_1$은 평행4변형이다. 따라서 대각선 $AC_1$과 $DB_1$은 사귐점 M에서 2등분된다.

마찬가지로 4각형 $ABC_1D_1$도 평행4변형이고 대각선 $BD_1$은 대각선 $AC_1$의 가운데점 M을 지나고 그 점에서 2등분된다.

결국 대각선 $AC_1$, $DB_1$, $BD_1$은 한 점 M에서 사귀며 그 점에서 2등분된다.

마찬가지로 대각선 $A_1C$가 점 M을 지나며 그 점에서 2등분된다는것을 밝힐수 있다.

**례** 평행6면체를 그림 4-33과 같은 평면으로 자르면 자름면은 평행4변형이다. 증명하여라.

(증명) 맞은면 ABCD와 $A_1B_1C_1D_1$은 평행(정리 2)이므로 자름면 $\gamma$와의 사귐선

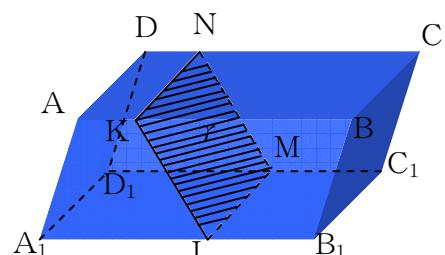
$KN//LM$　　　(1)

또한 맞은면 $AA_1B_1B$와 $DD_1C_1C$는 평행(정리 2)이므로 자름면 $\gamma$와의 사귐선 $KL//NM$　　(2)

따라서 (1), (2)로부터

자름면 KLMN은 평행4변형이다.

그림 4-33

## 문 제

1. 모임$M=\{$바른4각기둥$\}$, $N=\{$직4각기둥$\}$, $P=\{$직6면체$\}$, $Q=\{$직평행6면체$\}$이다. 다음 모임들사이의 관계에서 옳은것은 어느것인가?
   1) $M\subset P\subset N\subset Q$  2) $M\subset P\subset Q\subset N$  3) $P\subset M\subset N\subset Q$  4) $P\subset M\subset Q\subset N$
2. 직6면체의 대각선의 길이는 모두 같다는것을 밝혀라.
3. 직평행6면체의 밑면의 두 변은 6cm, 8cm이고 그사이의 각은 60°이다. 이 직평행6면체의 높이가 3cm일 때 대각선면의 면적을 구하여라.
4. 직평행6면체의 밑면의 두 변은 3cm, 4cm이고 그사이의 각은 30°이다. 이 직평행6면체의 높이가 6cm일 때 대각선의 길이를 구하여라.
5. 직평행6면체의 밑변의 두 변은 2cm, 5cm, 밑면의 작은 두 변사이의 거리는 4cm, 옆모서리의 길이는 $2\sqrt{2}$ cm이다. 이 직평행6면체의 대각선의 길이를 구하여라.
6. 바른6면체의 한 모서리는 $a$이다. 한 정점으로부터 대각선까지의 거리를 구하여라.
7. 바른6면체 $ABCDA'B'C'D'$에서 모서리 $AB$, $BB'$, $B'C'$, $C'D'$ $D'D$, $DA$의 가운데점을 각각 L, M, N, P, Q, R라고 할 때 6각형 LMNPQR는 바른6각형임을 증명하여라.

### 3. 각뿔과 각뿔대

다각형과 다각형평면밖의 한 점을 다각형의 정점들과 맺어서 얻은 3각형들을 면으로 하는 다면체를 **각뿔**이라고 부른다.

여기서 다각형을 각뿔의 **밑면**, 한 점을 각뿔의 **정점**, 3각형들을 각뿔의 **옆면**, 정점과 밑면의 정점들을 맺는 선분들을 각뿔의 **옆모서리**, 정점에서 밑면까지의 거리를 **높이**라고 부른다.

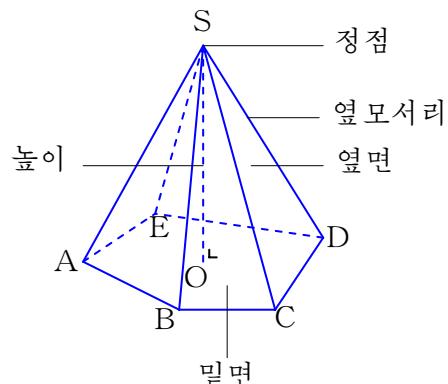


그림 4-34

정점이 S이고 밑면이 다각형 ABCD…E인 각뿔을 각뿔 S-ABCD…E와 같이 표시한다.

밑면의 변이 $n$개인 각뿔을 $n$**각뿔**이라고 부른다.

밑면이 바른다각형이고 옆모서리의 길이가 모두 같은 각뿔을 **바른각뿔**이라고 부른다.

각뿔의 정의로부터 각뿔의 밑면은 다각형이고 옆면은 3각형이다.

각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자를 때 밑면과 자름면사이의 부분을 각뿔대라고 부른다.

여기서 평행인 두 면을 각뿔대의 **밑면**, 나머지 면들을 각뿔대의 **옆면**, 두 밑면사이의 거리를 각뿔대의 **높이**라고 부른다.

$n$각뿔로부터 얻어지는 각뿔대를 **$n$각뿔대**, 바른각뿔로부터 얻어지는 각뿔대를 **바른각뿔대**라고 부른다.

밑면이 ABCD⋯E, $A_1B_1C_1D_1\cdots E_1$인 각뿔대를 각뿔대 ABCD⋯E－$A_1B_1C_1D_1\cdots E_1$과 같이 표시한다.

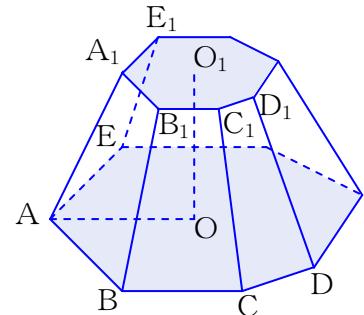



그림 4-35

**알아보기** 3각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 밑면의 모양과 같은가? 또 4각뿔일 때는 어떤가?

**정리 3.** 각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자르면
1) 자름면은 밑면과 닮은 다각형이다.
2) 자름면과 밑면의 면적의 비는 정점으로부터 그 면까지의 거리의 2 제곱과의 비와 같다.

**(증명)** 각뿔 S－ABCD⋯EF를 밑면에 평행인 평면으로 잘랐을 때 자름면을 $A_1B_1C_1D_1\cdots E_1F_1$이라고 하자.

정점 S에서 밑면과 자름면까지의 거리를 각각 SO, $SO_1$라고 하자.

1) 자름면 //밑면이므로 이 면들과 옆면의 사귐선들은 서로 평행이다.

즉 AB $/\!/ A_1B_1$, BC $/\!/ B_1C_1$, CD $/\!/ C_1D_1$ ,⋯, EF $/\!/ E_1F_1$

따라서

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,\ \cdots,\ \angle F = \angle F_1$$

그러므로

다각형 ABCD⋯EF ∽ 다각형 $A_1B_1C_1D_1 \cdots E_1F_1$

2) 1)로부터

$$\frac{S(A_1B_1C_1D_1\cdots E_1F_1)}{S(ABCD\cdots EF)} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 \quad (1)$$

그런데 $\triangle OAB \backsim \triangle O_1A_1B_1$이므로

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{O_1A_1}{OA}$$

이고 △SAO에서 $A_1O_1 /\!/ AO$이므로

$$\frac{O_1A_1}{OA}=\frac{SO_1}{SO}$$

따라서

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{SO_1}{SO} \qquad (2)$$

(1)과 (2)로부터

$$\frac{S(A_1B_1C_1D_1\cdots E_1F_1)}{S(ABCD\cdots EF)}=\left(\frac{SO_1}{SO}\right)^2$$

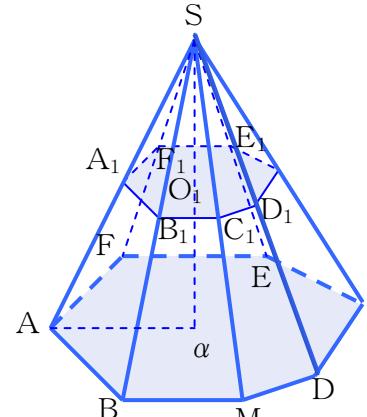



그림 4-36

례 1 바른각뿔의 높이는 밑면인 바른다각형의 중심을 지난다. 증명하여라.

**(풀이)** 바른각뿔 S-ABCD…EF에서 높이를 SO라고 하면 직3각형 SAO, 직3각형 SBO, 직3각형 SCO, … , 직3각형 SFO에서

SA=SB=SC=SD= … =SE=SF, SO : 공통변이므로

직3각형 SAO≡직3각형 SBO≡직3각형 SCO≡ … ≡직3각형 SFO

따라서

AO=BO=CO= … =FO

결국 O는 바른다각형 ABC … EF의 중심이다.

례 2 각뿔대 $A_1B_1C_1D_1\cdots E_1F_1-ABCD\cdots EF$에서

$$AB /\!/ A_1B_1,\ BC /\!/ B_1C_1,\ \cdots,\ FA /\!/ F_1A_1$$

(두 평행인 밑면들의 옆면과의 사귐선)이므로 옆면 $AA_1B_1B$, $BB_1C_1C$, …, $FF_1A_1A$는 제형이다.

례 3 각뿔의 밑면은 평행4변형인데 그 변들은 3㎝, 7㎝이고 한 대각선은 6㎝이다. 각뿔의 높이는 4㎝인데 밑면의 대각선의 사귐점을 지난다. 각뿔의 옆모서리들을 구하여라.

**(풀이)** 평행4변형 ABCD(밑면)에서 AB=7,

AD=3이라고 하면 BD=6이고

$$AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$$

$$AC^2+6^2=2(7^2+3^2)=116$$

$$AC^2=116-36=80,\ AC=4\sqrt{5}$$

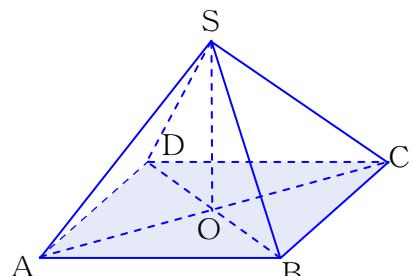



그림 4-37

따라서 $AO=2\sqrt{5}$, $BO=3$

그리고 $SO \perp OA$, $SO \perp OB$이므로 $\triangle SOA$와 $\triangle SOB$는 직3각형이다.

따라서

$$SA=\sqrt{SO^2+AO^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{36}=6\,(\text{cm})$$

$$SB=\sqrt{SO^2+BO^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5\,(\text{cm})$$

## 문 제

1. 바른각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 바른다각형이다. 왜 그런가?
2. 바른각뿔대의 옆면은 바른제형이다. 왜 그런가?
3. 다음 명제에서 옳은것을 찾아보아라.
   1) 옳은 명제 《4각기둥은 6면체이다.》의 거꿀명제는 옳은 명제이다.
   2) 옳은 명제 《바른각뿔대의 옆면들은 바른제형이다.》의 거꿀명제는 옳지 않은 명제이다.
   3) 바른4각뿔의 한 모서리에 평행인 임의의 자름면은 3각형 또는 4각형이다.
4. 바른각뿔대의 옆면적은 두 밑면의 둘레의 길이의 합과 옆면의 높이와의 적의 $\frac{1}{2}$과 같다. 증명하여라.
5. 밑면적은 $400\text{cm}^2$인 각뿔의 높이를 4등분하고 그 점들을 지나며 밑면에 평행인 평면으로 각뿔을 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.
6. 3각뿔 S–ABC의 네개의 모서리 SA, AB, BC, CS의 가운데점을 각각 K, L, M, N이라고 할 때 SB=AC이면 $KM \perp LN$이라는것을 증명하여라.

유명해진 다면체 $C_{60}$

정점이 60개이고 매 정점을 지나는 모서리가 3개이며 면들이 합동인 바른5각형과 바른6각형인 다면체는 탄소동소체인 플러렌분자구조모형으로 알려진 $C_{60}$이다. $C_{60}$의 발견으로 1996년에 3명의 학자가 노벨화학상을 수여받았다. $C_{60}$의 면과 모서리의 개수를 구하여라.

## 련습문제

1. 한 변의 길이가 $a$인 바른4면체가 있다. 서로 맞대고있는 두 모서리는 수직으로 어긴다는것을 증명하여라. 그리고 이 두 모서리사이의 거리를 구하여라.
2. 직평행6면체의 밑면은 이웃한 두 변이 6㎝, 8㎝이고 그사이의 각이 30°, 옆모서리는 5㎝이다. 걸면적을 구하여라.
3. 직6면체의 한 정점에서 나가는 세 모서리의 비가 3:7:8이고 걸면적은 808㎠이다. 이 직6면체의 체적을 구하여라.
4. $n$각기둥에서 대각선의 총 수를 구하여라.
5. 4면체 ABCD에서 모서리 AD와 BC가 수직이라면 AD, BC에 각각 평행인 평면으로 잘랐을 때 자름면은 어떤 4각형이 되겠는가?
6. 평행6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 모서리 AB, $BB_1$, $B_1C_1$, $C_1D_1$, $D_1D$, DA의 가운데점 L, M, N, P, Q, R는 한 평면에 놓인다는것을 증명하여라.
7. 직3각기둥의 밑면의 변들은 각각 10㎝, 17㎝, 21㎝이고 높이는 10㎝이다. 밑면의 제일 작은 높이와 옆모서리를 지나는 평면으로 각기둥을 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.
8. 밑면의 한 변이 $a$이고 높이가 $b$인 바른4각기둥을 밑면의 한 정점을 지나면서 밑면의 대각선과 45°각을 이루는 평면으로 잘랐다. 이때 자름면의 면적을 구하여라. $(b>\sqrt{2}a)$
9. 각뿔의 밑면에 평행인 자름면이 그 각뿔의 높이를 3:4(정점으로부터 시작하여)의 비로 나눈다. 자름면의 면적이 밑면적보다 200㎠ 작다. 각뿔의 밑면적을 구하여라.
10. 각뿔의 밑면은 바른4각형인데 각뿔의 높이는 밑면의 한 정점을 지난다. 밑면의 한 변이 20㎝, 각뿔의 높이가 21㎝일 때 옆면적을 구하여라.
11. 바른4각뿔이 있다. 밑면의 한 변은 10㎝, 옆면과 밑면사이의 각은 40°이다. 옆모서리와 밑면이 이루는 각을 구하여라.
12. 바른4각뿔의 밑면의 한 변은 $a$, 각뿔의 옆모서리와 높이사이의 각은 30°이다.

    각뿔의 밑면의 한 정점을 지나며 그 정점의 맞은편 옆모서리에 수직인 자름면의 면적을 구하여라.
13. 밑면의 한 변이 각각 20㎝, 36㎝이고 높이가 30㎝인 바른4각뿔대모양의 통을 만들려고 한다. 거기에 드는 철판의 면적을 구하여라.(뚜껑은 없다.)
14. 평행6면체의 밑면은 바른4각형이고 웃밑면의 한 정점에서 아래 밑면의 매 정점까지의 거리는 같다. 밑면의 한 변은 $a$, 옆모서리가 $b$일 때 6면체의 걸면적과 체적을 구하여라.

## 제 3 절. 회전체

### 1. 원기둥

> 다문선으로 둘러싸인 평면도형 F 가 있다. 이 평면도형이 놓여있는 평면 $\alpha$ 를 평면의 한 직선 $\ell$ 주위로 회전시킬 때 평면도형이 만드는 도형을 회전체라고 부른다.

회전체의 정의로부터 회전체를 축을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 축에 관하여 대칭이라는것을 알수 있다.

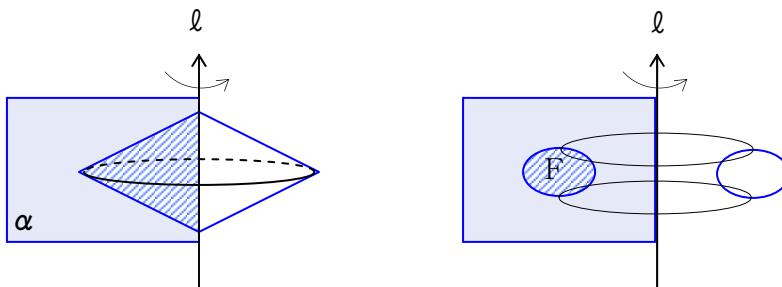



그림 4-38

직4각형을 그 한 변을 축으로 하여 회전시킬 때 얻어지는 회전체를 **직원기둥**이라고 부르고 이것을 간단히 **원기둥**이라고 부르겠다. 여기서 축에 수직인 변이 그리는 면(원)을 원기둥의 **밑면**, 축에 평행인 변을 원기둥의 **모선**, 모선이 그리는 면을 원기둥의 **옆면**, 두 밑면사이의 거리를 원기둥의 **높이**라고 부른다. 원기둥의 정의로부터 원기둥을 축을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 직4각형이고 축에 수직인 평면으로 자르면 자름면은 원이라는 것을 곧 알수 있다.

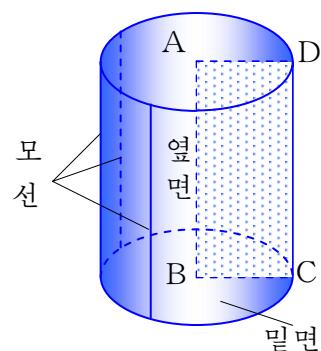



그림 4-39

> 정리 1. 원기둥을 축에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 직4 각형이다.

**례 1** 밑면의 반경이 2㎝이고 높이가 3㎝인 원기둥을 축으로부터 1㎝만 한 거리에 있는 축에 평행인 평면으로 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.

그림 4-40

(풀이) 자름면 $AA_1B_1B$는 직4각형이다.(정리 1)

$$AB = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$$

$$AA_1 = OO_1 = 3$$

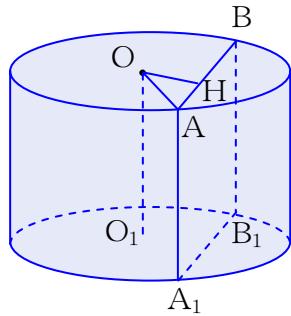
$$S(AA_1B_1B) = AB \cdot AA_1 = 2\sqrt{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

**례 2** 반경이 $r$인 원기둥에 바른6면체가 내접하였다. 이 바른6면체의 대각선의 길이를 구하여라.

그림 4-41

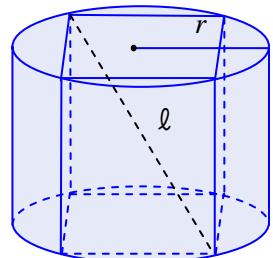
(풀이) 내접바른6면체의 모서리를 $a$라고 하면 바른6면체의 성질로부터

$$2a^2 = (2r)^2,\ a^2 = 2r^2 (a = \sqrt{2}r)$$

대각선의 길이를 $\ell$이라고 하면

$$\ell^2 = (2r)^2 + a^2 = 4r^2 + 2r^2 = 6r^2$$

$$\ell = \sqrt{6}r$$

## 문 제

1. 원기둥의 축을 지나는 자름면은 바른4각형인데 대각선의 길이는 $a$이다. 이 원기둥의 옆면적와 체적을 구하여라.
2. 원기둥을 축에 평행인 평면으로 잘랐다. 이때 생긴 웃밑면의 자름선(활줄)의 길이는 4cm이다. 원기둥의 밑면의 반경이 5cm일 때 축으로부터 자름면까지의 거리를 구하여라.
3. 원기둥에 직6면체가 내접하였다. 이 직6면체의 밑면들은 각각 원기둥의 밑면에 놓인다. 직6면체의 밑면의 이웃한 두 변의 길이는 3cm, 4cm이고 높이는 5cm이다. 원기둥의 겉면적과 체적을 구하여라.

### 2. 원뿔과 원뿔대

직3각형을 그 한 직각변을 축으로 하여 회전시킬 때 얻어지는 회전체를 직원뿔이라고 부르고 이것을 간단히 원뿔이라고 부른다.

여기서 축에 수직인 직각변이 그리는 면을 원뿔의 **밑면**, 빗변을 원뿔의 **모선**, 모선이 그리는 면을 원뿔의 **옆면**, 정점에서 밑면까지의 거리를 원뿔의 **높이**라고 부른다.

정점에서 밑면에 내린 높이의 밑점은 밑면의 중심에 놓인다. 원뿔의 정의로부터 원뿔의 축을 지나는 자름면은 2등변3각형이고 축에 수직인 자름면은 원이라는것이 곧 나온다.

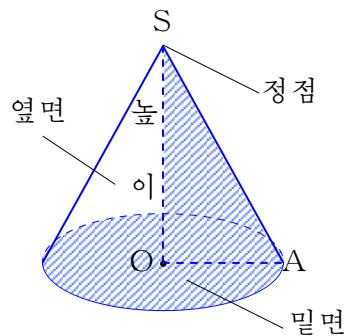



그림 4-42

**정리 2. 원뿔을 정점을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 2 등변 3 각형이다.**

**(증명)** 자름면이 밑면의 원둘레와의 사귐점을 A, B라고 하자.

정점 S와 A는 자름면의 점이므로 직선 SA는 자름면에 놓인다.

또한 SA는 직3각형 SOA의 빗변이므로 원뿔의 정의로부터 원뿔의 옆면에 놓인다.

따라서 SA는 원뿔의 옆면과 자름면의 사귐선이다. SB도 마찬가지이다.

그리고 SA와 SB는 합동인 직3각형의 빗변이므로

$$SA=SB$$

따라서 자름면은 2등변3각형이다.

원뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자를 때 자름면과 밑면사이의 부분을 **원뿔대**라고 부른다. 각뿔대에서처럼 원뿔대에서도 밑면, 옆면, 높이를 생각한다.

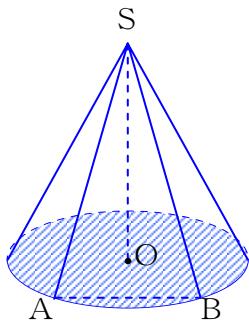



그림 4-43

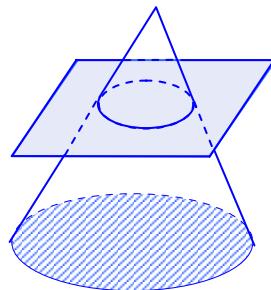



그림 4-44

**례 1** 밑면의 반경이 3cm, 높이가 4cm인 원뿔의 정점을 지나며 밑면의 중심에서 2cm의 거리에 있는 활줄을 지나는 평면으로 원뿔을 잘랐다. 자름면의 둘레의 길이를 구하여라.

**(풀이)** 자름면 SAB는 2등변3각형이다. (정리 2)

$\Delta$OAB는 2등변3각형이고 OH⊥AB이므로

$$AB = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{3^2 - 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$\Delta$SOA는 직3각형이므로

$$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

따라서

$$\ell(SAB) = AB + 2\cdot SA = 2\sqrt{5} + 2\cdot 5 = 2(5 + \sqrt{5})$$

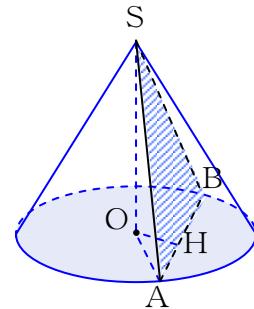



그림 4–45

**례 2** 밑면의 반경이 $r$인 원뿔에 변의 길이가 $a$인 바른6면체가 내접하였다. 원뿔의 체적을 구하여라.

**(풀이)** 바른6면체의 웃밑면을 지나는 평면으로 원뿔을 자르면 자름면은 밑면에 평행인 원이고 바른4각형 ABCD는 이 원에 내접한다.

따라서 대각선 BD의 가운데점 O는 이 원의 중심이고

SO⊥자름면

그리고 SO의 연장선이 밑면과 사귀는 점을 $O_1$이라고 하면

$SO_1$⊥밑면

따라서 원뿔의 높이 $SO_1$은 바른6면체의 중심선 $OO_1$과 일치한다.

이제 원뿔의 높이와 바른6면체의 밑면의 대각선을 지나는 평면으로 원뿔을 자르면 자름면은 그림 4–46의 ㄴ)과 같다.

ㄱ)

ㄴ)

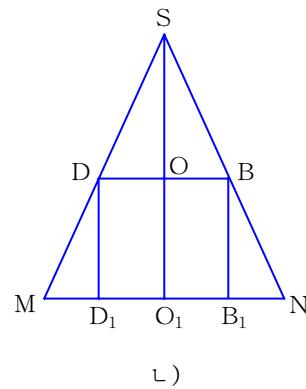
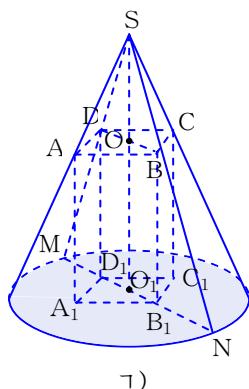



그림 4–46

여기서 $SO_1 = h$라고 하면 $MO_1 = r$, $DO = \frac{1}{2}\cdot DB = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$

이므로

$$\frac{h-a}{h} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{r}, \qquad hr - ar = \frac{\sqrt{2}}{2}ah$$

$$h\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=ar, \qquad h=\frac{ar}{r-\frac{\sqrt{2}}{2}a}$$

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{ar}{r-\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\pi r^3}{2r-\sqrt{2}a}$$

### 문 제

1. 밑면의 반경이 $r$이고 높이가 $h$인 원뿔을 밑면에 평행이고 정점으로부터 $d$만 한 거리에 있는 평면으로 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.
2. 원뿔의 모선이 13cm, 높이가 12cm이다. 원뿔의 높이와 어기면서 밑면에 평행인 직선에서 밑면까지의 거리는 6cm, 높이까지의 거리는 2cm이다. 이 직선의 원뿔 아낙에 든 부분의 길이를 구하여라.
3. 원뿔대의 모선의 길이는 $2a$이고 밑면과 $60°$의 각을 이룬다. 한 밑면의 반경은 다른 밑면의 반경의 2배이다. 두 밑면의 반경을 구하여라.
4. 직원뿔을 정점을 지나는 평면으로 자를 때 자름면의 면적이 가장 커지는것은 아래의 어느 경우인가?

   1) 밑변의 길이가 제일 클 때　　　2) 옆변의 길이가 제일 클 때

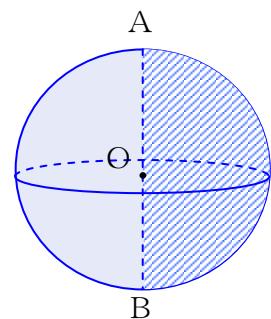
   3) 정각의 크기가 제일 클 때　　　4) 정점에서 그은 높이가 제일 클 때
5. 모선들사이의 가장 큰 각이 $120°$인 원뿔의 옆면적은 그 원뿔과 같은 밑면과 높이를 가지는 원기둥의 옆면적과 같다는것을 증명하여라.

## 3. 구

반원을 그 직경을 축으로 하여 한바퀴 회전시켰을 때 생기는 회전체를 구라고 부른다. 이때 반원둘레가 그리는 면을 구면이라고 부른다.

여기서 반원의 활줄의 가운데점을 구의 **중심**, 구의 중심과 구면의 한 점을 맺는 선분을 구의 **반경**, 구의 중심을 지나는 직선이 구면과 사귀여 생기는 선분을 구의 **직경**이라고 부른다.

구의 정의로부터 구의 직경을 지나는 평면으로 구를 자르면 자름면은 원이라는것을 알수 있다.

그림 4-47

**정리 3. 구를 평면으로 자르면 자름면은 원이다.**

(증명) 구의 중심 O에서 자름면 $\alpha$에 그은 수직선의 밑점을 M, 자름면과 구면의 사귐선의 한 점을 P라고 하면 OM=$d$는 일정하고 OP=$r$는 구의 반경이다.
따라서 직3각형 OMP에서

$$MP=\sqrt{r^2-d^2} \quad : \text{일정}$$

즉 P는 일정한 점 M을 중심으로 하고 반경이 $\sqrt{r^2-d^2}$인 원둘레의 점이다.

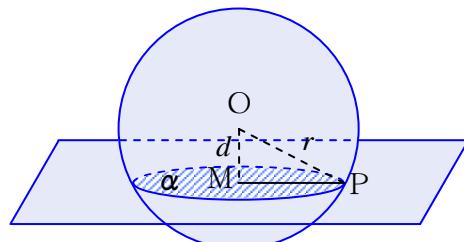



그림 4-48

구를 중심을 지나는 평면으로 자를 때 생기는 원을 **큰 원**, 중심을 지나지 않는 평면으로 자를 때 생기는 원을 **작은 원**이라고 부른다.

구를 한 평면으로 잘랐을 때 생기는 구의 매 부분을 **결구**라고 부르고 자름면을 결구의 **밑면**, 결구의 밑면에 수직인 직경에서 결구안에 든 선분을 결구의 **높이**라고 부른다. 그리고 결구에서 구면부분을 **구관(구면갓)**이라고 부른다.

그림 4-49

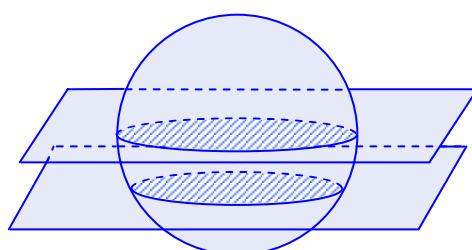
구를 평행인 두 평면으로 잘랐을 때 평행평면사이에 끼워있는 구의 부분을 **구대**라고 부르고 두 자름면을 구대의 **밑면**, 밑면사이의 거리를 구대의 **높이**라고 부른다.

**례 1** 반경이 3cm인 구를 평면으로 잘라서 반경이 2cm인 원을 얻으려고 한다. 구의 중심으로부터 얼마만한 거리에 있는 평면으로 잘라야 하겠는가?

그림 4-50

(풀이) 구의 중심에서 자름면까지 거리를 $d$라고 하자.
O와 자름면의 중심 $O_1$를 맺으면 $OO_1\perp$자름면이므로 $OO_1=d$, 자름면의 원둘레의 한 점을 A라고 하면

$$O_1A=2,\ OA=3$$

직3각형 $OO_1A$에서

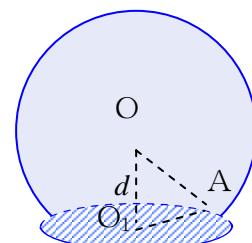
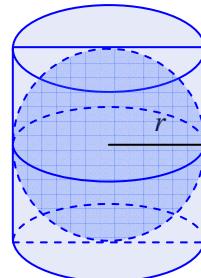
$$d^2=3^2-2^2=5,\quad d=\sqrt{5}(cm)$$

**례 2** 그림 4 –51과 같이 반경이 $r$인 구에 원기둥이 외접하였다. 구면의 면적과 원기둥의 겉면적의 비를 구하여라.

그림 4–51

**(풀이)** 구와 원기둥을 원기둥의 축을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 원과 원에 외접한 바른4각형이다. 따라서 원기둥의 밑면의 반경은 $r$, 높이는 $2r$이다.

구면의 면적을 S, 원기둥의 겉면적을 S′라고 하면

$$\frac{S}{S'}=\frac{4\pi r^2}{2\pi r^2+2\pi r\,2r}=\frac{4\pi r^2}{6\pi r^2}=\frac{2}{3}$$

## 문 제

1. 구면의 한 점을 지나며 그 점을 지나는 구의 반경에 수직인 평면을 구의 **접평면**이라고 부른다. 구의 접평면은 구와 한 점만을 공통으로 가진다는것을 밝혀라.
2. 반경이 8cm인 구를 중심으로부터 2cm만 한 거리에 있는 평면으로 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.
3. 구에 원기둥이 내접하였다. 구의 반경은 6cm이고 원기둥의 밑면의 반경은 3cm이다. 원기둥의 체적을 구하여라.
4. 구에 바른4면체가 내접하였다. 바른4면체의 한 모서리가 $a$일 때 구면의 겉면적과 체적을 구하여라.

## 련 습 문 제

1. 원기둥의 높이는 8cm, 밑면의 반경은 5cm이다. 이 원기둥을 축에 평행인 평면으로 잘랐는데 자름면은 바른4각형이다. 축으로부터 자름면까지 거리를 구하여라.
2. 밑면의 반경이 5cm, 높이가 6cm인 원기둥이 있다. 두 밑면의 원둘레에서 각각 한 점을 잡아서 맺은 선분의 길이가 10cm이다. 축과 이 선분사이의 거리를 구하여라.

3. 원기둥의 밑면의 반경과 높이가 같다. 원기둥에 바른6각기둥이 외접하였다. 그 옆면의 대각선과 축사이의 각을 구하여라.

4. 원기둥의 높이는 2cm, 밑면의 반경은 7cm이다. 이 원기둥안에 바른4각형을 끼워넣었는데 두 정점은 웃 밑면의 원둘레에 있고 두 정점은 아래 밑면의 원둘레에 있다. 바른4각형의 변의 길이를 구하여라.

5. 원뿔의 밑면의 반경은 $r$이다. 이 원뿔을 축을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 바른3각형이 된다. 이 원뿔을 정점을 지나는 평면으로 잘랐을 때 자름면에서 두 모선이 이루는 각은 $\theta$이다. 이 자름면의 면적을 구하여라.

6. 반경이 $r$인 금속구를 녹여서 옆면적이 밑면의 면적보다 3배 큰 원뿔모양의 그릇안에 가득 채워넣었다. 이때 원뿔의 높이를 구하여라.

7. 원뿔의 높이가 $h$이다. 이 원뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자르되 자름면의 면적이 밑면적의 절반으로 되게 하려면 정점으로부터 얼마 떨어진 평면으로 잘라야 하는가?

8. 원뿔을 높이를 지나는 평면으로 잘랐다. 이 자름면에서 높이의 가운데점을 지나며 모선에 평행인 직선을 그었다. 이 평행선분의 길이를 구하여라. 원뿔의 높이는 $h$이고 밑면의 반경은 $r$이다.

9. 원뿔대의 밑면의 반경은 각각 3cm, 6cm이고 높이는 4cm이다. 모선의 길이를 구하여라.

10. 원뿔대의 밑면의 반경은 각각 $r_1, r_2$이고 모선이 밑면과 이루는 각은 $45^\circ$이다. 높이를 구하여라.

11. 원뿔대의 밑면의 반경은 각각 3cm, 7cm이고 모선의 길이는 5cm이다. 축을 지나는 자름면의 면적을 구하여라.

12. 원뿔대의 밑면의 면적은 M, N이다. 밑면에 평행이며 높이의 가운데점을 지나는 자름면의 면적을 구하여라.

13. 반경이 41cm인 구를 중심으로부터 9cm 거리에 있는 평면으로 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.

14. 구면에 세 점 A, B, C가 주어졌다. 이 점들사이의 거리는 6cm, 8cm, 10cm이고 구의 반경은 13cm이다. 구의 중심으로부터 세 점을 지나는 평면까지의 거리를 구하여라.

## 제4절. 투 영 도

### 1. 투영도

공간도형을 평면에 나타내는데 바른사영을 쓴다. 이때 그림 4–52에서 보는것처럼 한 평면의 사영만 가지고는 도형의 생김새와 크기를 자세히 알아볼수 없으므로 서로 수직인 두 평면(또는 세 평면)의 사영을 함께 그린다.

그림에서 H면을 **수평투영면**, V면을 **정면투영면**이라고 부른다.

그림 4–53은 직6면체와 원기둥을 H면과 V면에 바른사영을 한 다음 한 면을 사귐선 $\ell$주위로 90°만큼 돌려서 두 사영이 한 평면에 놓이도록 한것을 보여준다.

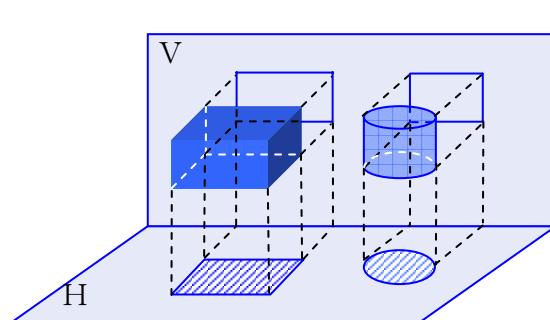
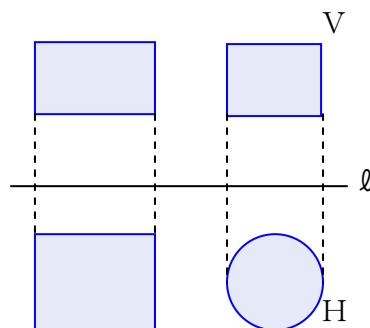



그림 4–52　　　　그림 4–53

이렇게 하여 얻은 사영을 **투영도**라고 부른다.

이때 H면의 투영도는 **수평투영도**, V면의 투영도는 **정면투영도**라고 부르고 $\ell$을 **투영축**이라고 부른다.

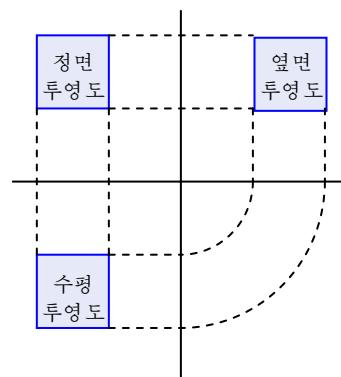
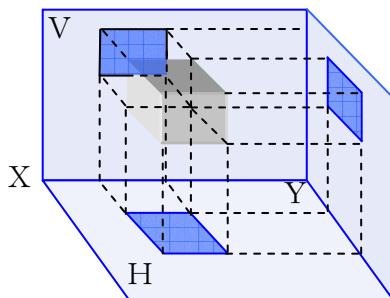



그림 4–54

필요에 따라 투영축 $\ell$에 수직인 평면에 바른사영을 나타내야 할 때도 있다.

이때 투영축에 수직인 평면을 **옆면투영면**, 그 면에 표시한 바른사영을 **옆면투영도**라고 부른다.

## 2. 점의 투영도

점 A의 수평투영면 H, 정면투영면 V의 사영을 각각 $a$, $a'$라고 하자.

$a$, $a'$는 각각 점 A의 수평투영도, 정면투영도이다.

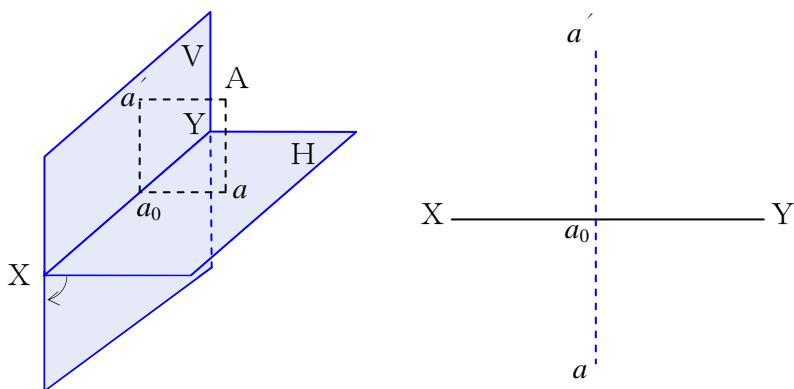



그림 4-55

> 성질 1. 점 A의 투영도에서 직선 $aa'$는 투영축 XY에 수직이다.
> 성질 2. 투영도에서 $aa_0$은 점 **A**에서 정면투영면까지의 거리를 나타내고 $a'a_0$은 점 **A**에서 수평투영면까지의 거리를 나타낸다.

**(증명)** 1) $\mathrm{A}a$, $\mathrm{A}a'$가 결정하는 평면을 α라고 하면

$$\mathrm{XY}\perp \mathrm{A}a\,,\quad \mathrm{XY}\perp \mathrm{A}a'$$

이므로 $\mathrm{XY}\perp\alpha$

따라서 평면 α와 XY의 사귐점을 $a_0$이라고 하면

$$aa_0\perp \mathrm{XY}\,,\quad a'a_0\perp \mathrm{XY}$$

그러므로 투영도에서 $aa'\perp\mathrm{XY}$

2) 평면 α에서 4각형 $\mathrm{A}aa_0a'$는 직4각형이므로

$$\mathrm{A}a' = aa_0\,,\quad \mathrm{A}a = a'a_0$$

## 문 제

1. 다음과 같은 점의 투영도를 그려라.

   1) 평면 H에서 우로 2cm, V에서 앞으로 4cm 거리에 있는 점 A

   2) 평면 V에 놓여있고 H에서 우로 3cm 거리에 있는 점 B

   3) 평면 H에 놓여있고 V에서 앞으로 3.5cm 거리에 있는 점 C

2. 그림 4-56은 점 A, B의 투영도이다. 어떠한 거리에 있는가?

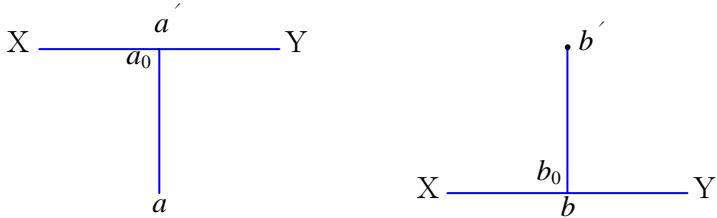



그림 4-56

### 3. 직선의 투영도

두 점 A, B를 지나는 직선 AB의 투영도를 보기로 하자.

직선의 한 평면에로의 바른사영은 그 직선의 두 점의 바른사영을 지나는 직선이다. 그러므로 직선 AB의 수평투영은 두 점 A, B의 수평투영도 $a$, $b$를 지나는 직선이고 정면투영도는 두 점 A, B 의 정면투영도 $a'$, $b'$를 지나는 직선이다.

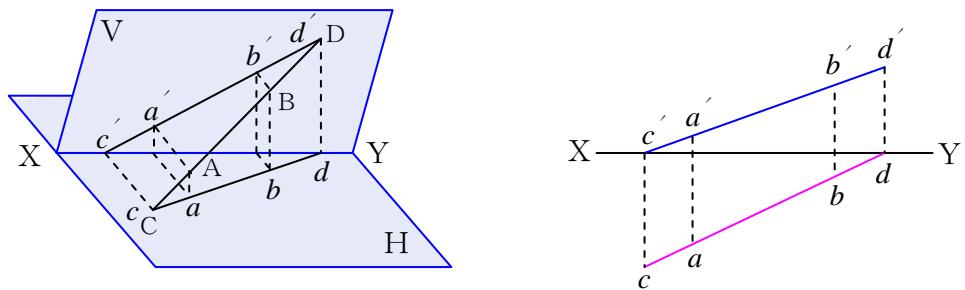



그림 4-57

**례 1** 그림 4-58의 투영도에 표시되여있는 매개 선분은 공간에서 H면, V면에 대하여 어떤 자리관계에 있는가?

또 투영도에서 선분의 실제길이가 어디에 나타나있는가?

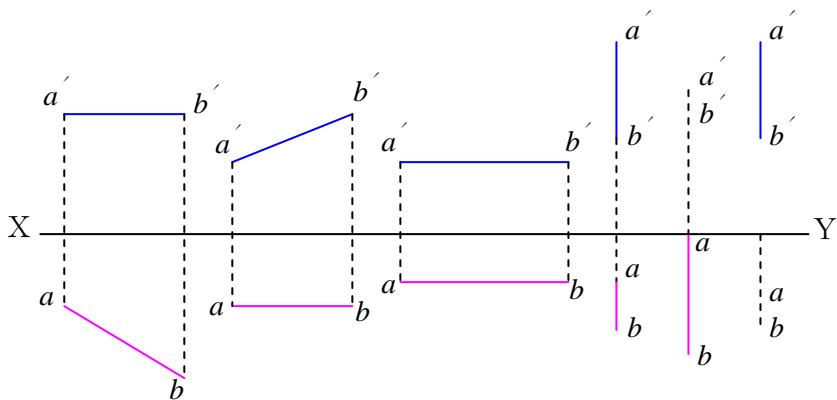



그림 4-58

**(풀이)** 1) 자리관계

① 수평투영면에 평행
② 정면투영면에 평행
③ 투영축에 평행
④ 투영축에 수직
⑤ 정면투영면에 수직
⑥ 수평투영면에 수직

2) 실제길이

①에서는 수평투영도
②에서는 정면투영도
③에서는 수평투영도와 정면투영도
④에서는 없다.
⑤에서는 수평투영도
⑥에서는 정면투영도

**례 2** 투영도에서 선분 AB의 실제길이를 구하여라.(그림 4-59)

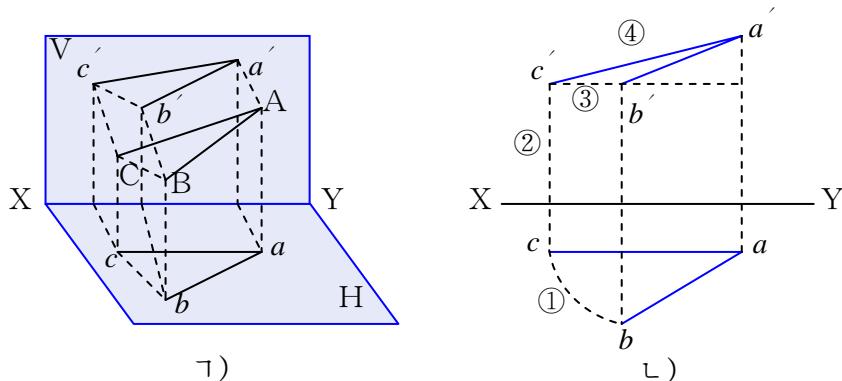



그림 4-59

**(풀이)** 1) AB ⫽̸ H이거나 AB//V인 경우, 이때는 앞의 례에서 이미 보았다.

2) AB ⫽̸ H , AB ⫽̸ V인 경우
직선 A*a*를 축으로 하여 제형 AB*ba*를 회전하여 V면에 평행되게 할 때의 B의 자리를 C라고 하자.

이때 $ab$의 길이가 달라지지 않으므로 점 $b$는 점 $a$를 중심으로 하는 원둘레를 따라 움직인다.

그리고 $Bb$의 길이가 달라지지 않으므로 $b'$는 XY에 평행인 직선을 따라 움직인다. 그리고 점 AC//V이므로

$$ac // XY$$

그러므로 점 C의 투영도는 그림 4-59의 ㄴ)에서와 같은 순서로 구할 수 있다.

$$AB = AC = a'c'$$

그러므로 투영도에서 $a'c'$가 선분 AB의 실제거리이다.

[다른 방법]

제형 $ABba$를 직선 $ab$를 축으로 하여 90° 돌려서 H면에 겹쳐놓자.

이때 겹쳐진 자리를 $abb_1a_1$라고 하면

$AB = a_1b_1$, $Aa = a_1a = a'a_0$,

$Bb = b_1b = b'b_0$

따라서 선분의 투영도로부터 다음과 같이 구한다. 점 $a$와 $b$에서 선분 $ab$에 수직선 $aa_1$, $bb_1$을 긋고

$$aa_1 = a_0a', \quad bb_1 = b_0b'$$

되게 하면 선분 $a_1b_1$은 선분 AB의 실제길이로 된다.

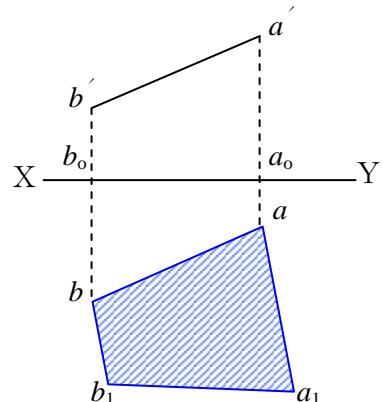



그림 4-60

## 문 제

1. 다음것을 증명하여라.
   1) $AB // V \Leftrightarrow AB = a'b' \Leftrightarrow ab // XY$
   2) $AB \perp V \Leftrightarrow$ $a'$와 $b'$는 겹친 점 $\rightarrow ab \perp XY$
2. 그림 4-61의 투영도들에서 두 선분의 자리관계를 설명하여라.

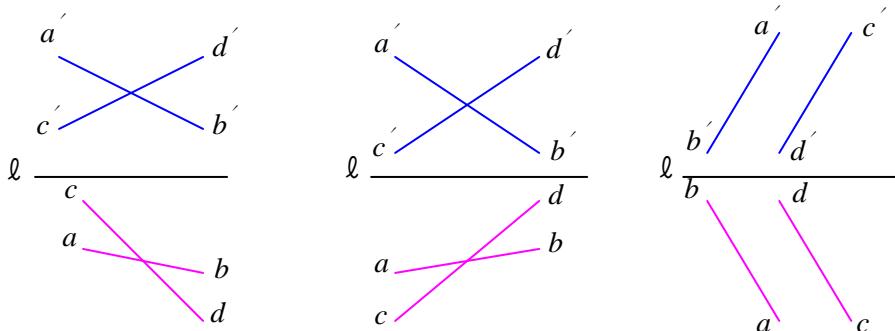



그림 4-61

3. 그림 4-62에서 선분 AB, CD, EF의 실제길이를 구하여라.

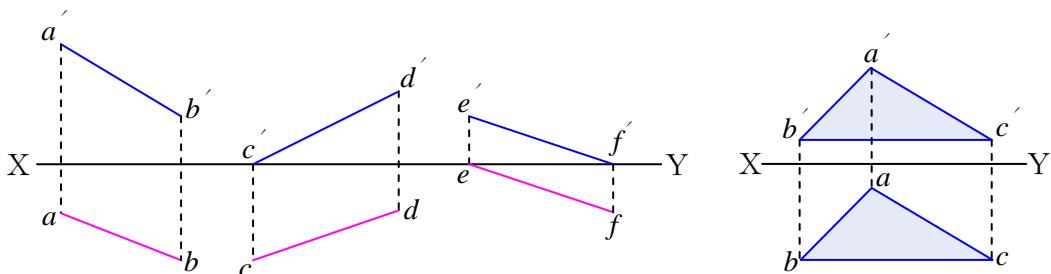



그림 4-62

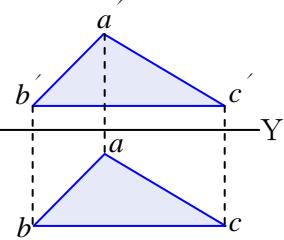



그림 4-63

4. 투영도에 △ABC의 무게중심 G의 투영도를 표시하여라. 그리고 △ABC의 변들의 실제길이를 구하고 그 3각형의 실제형태를 그려라.(그림 4-63)

### 4. 립체의 투영도

다면체는 다각형으로 둘러막혀있고 그 면들의 경계는 모서리들이므로 다면체의 투영도를 그리는것은 그 모서리들의 투영도를 그리는것에 귀착된다.

이때 투영면을 향해서 직접 보이는 모서리는 실선《 ——— 》으로, 뒤쪽에 있어서 직접 보이지 않는 모서리는 점선 《------》으로 나타낸다.

원기둥, 원뿔, 구와 같이 겉면이 곡면 또는 곡면과 평면부분으로 된 립체(곡면체)에 대해서도 역시 그 투영도를 그리는것은 선이나 정점만 투영도를 그리는것에 귀착된다.

**례 1** 다음의 투영도를 보고 그 립체의 겯양도(본모양그림)를 그려라.

그림 4-64

**(풀이)**

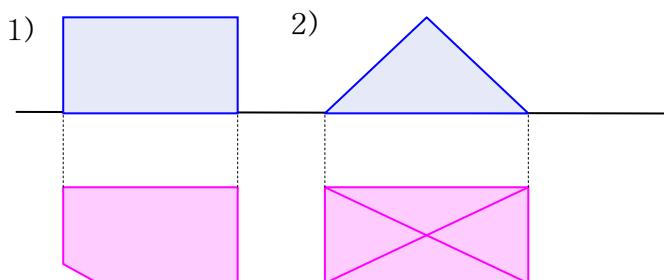
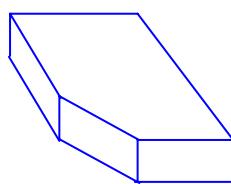
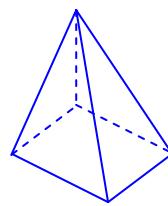



그림 4-65

**례 2** 겨냥도가 다음과 같은 립체의 투영도를 그려라.

그림 4-66

(풀이)

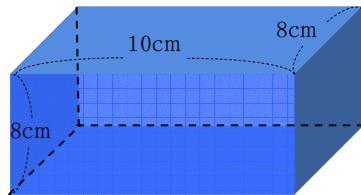
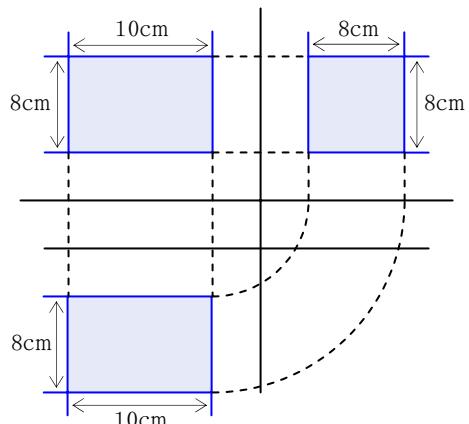



그림 4-67

## 문 제

**1.** 다음의 투영도를 보고 그 립체의 겨냥도를 그려라. (그림 4-68)

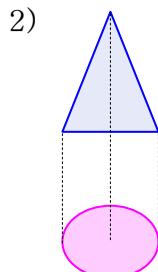
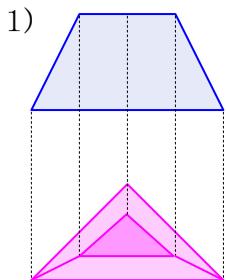



그림 4-68

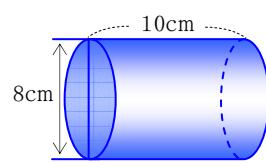



그림 4-69

**2.** 겨냥도가 다음과 같은 립체의 투영도를 그려라.(그림 4-69)

## 련습문제

1. 다음의  투영도에 나타난 립체는 어떤 립체인가?(그림 4-70)

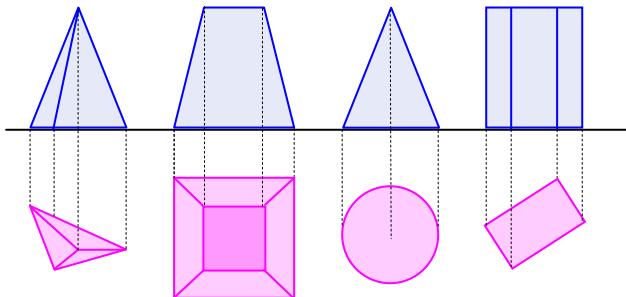



그림 4-70

2. 그림 4-71은 3각기둥의 투영도이다.
   1) 평면 H에 수직인 모서리와 면을 말하여라.
   2) 평면 V에 수직인 모서리와 면을 말하여라.
3. 다음과 같은 립체의 밑면이 평면 H에 놓여있고 밑면의 중심이 평면 V에서 5cm의 거리에 있을 때 투영도를 그려라.
   1) 밑면은 한 변이 3.5cm인 바른3각형이고(한 변은 투영축에 평행) 높이가 6cm인 직각기둥
   2) 밑면의 반경이 2cm, 높이가 3cm인 직원뿔

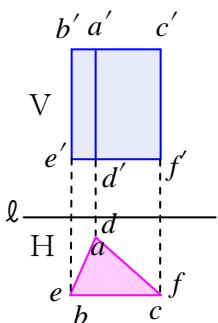
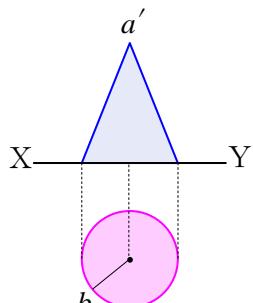
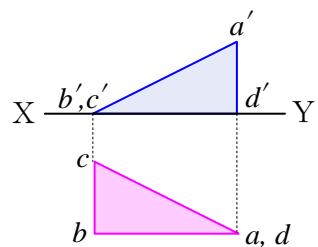



그림 4-71 그림 4-72 그림 4-73

4. 그림 4-72는 원뿔의 투영도이다.
   1) 모선 AB의 점 P의 정면투영도를 그려라.
   2) 선분 AP의 실제길이를 정면투영면에 나타내여라.
5. 그림 4-73은 어떤 립체의 투영도이다. 다음 문장에서 □안에 적당한 말이나 수를 써넣어라.

① 이 립체는 □이라고 부른다.

② 이 립체에는 □개의 모서리가 있다.

③ 이 립체에는 □개의 면이 있으며 모두 □이다.

## 복습문제

1. 다음 조건을 만족시키는 두 직선 $a$, $b$의 자리관계를 말하여라.

$$a \subset \alpha,\ \alpha \cap \beta = m,\ a \cap m = \{A\},\ b \cap \beta = \{B\}\ (A \neq B)$$

2. 다음 사실이 성립하지 않는다는것을 례를 들어 밝혀라.

$$a // b,\quad a \subset \alpha,\quad b \subset \beta \Rightarrow \alpha // \beta$$

3. 다음의 사실이 성립하는가? 성립하지 않으면 례를 들어라.

   1) $a // \alpha,\ b // \alpha \Rightarrow a // b$

   2) $a // \alpha,\ a // \beta \Rightarrow \alpha // \beta$

4. 직선 $a$, $b$와 평면 $\alpha$가 있다. 다음의 명제에서 옳은 명제를 찾아보아라.

   1) $a // \alpha,\ a // b \Rightarrow b // \alpha$이다.

   2) $a \subset \alpha,\ b \cap \alpha = \{B\}$이면 $a$와 $b$는 서로 다른 평면에 있다.

   3) $a // b,\ b \perp \alpha \Rightarrow a // \alpha$

   4) $a \perp b,\ a \perp \alpha \Rightarrow b // \alpha$

5. 빗변이 $a$이고 한 뾰족각이 $\theta$인 직3각형이 그 빗변을 지나는 평면과 각 $\varphi$를 이룬다. 직각의 정점에서 그 평면까지 거리를 구하여라.

6. 바른제형의 큰 밑변은 $a$이고 옆변이 큰 밑변과 이루는 각은 $60°$, 대각선이 옆변과 이루는 각은 $90°$이다. 대각선의 사귐점 O에서 제형평면에 길이 $h$인 수직선분 OM을 그었다. M에서 제형의 변까지의 거리들을 구하여라.

7. △ABC의 무게중심 G, 이 3각형과 공통점을 가지지 않는 평면에 던진 정점들의 사영을 $A_1$, $B_1$, $C_1$, 무게중심 G의 사영을 $G_1$이라고 할 때

$$AA_1+BB_1+CC_1=3GG_1$$

이라는것을 증명하여라.

8. 직각기둥의 밑면은 2등변3각형이다. 그것의 두변 AB=BC=7cm이고 셋째 변 AC=2cm이다. 변 AC를 지나서 각기둥의 밑면과 30°의 각을 이루는 평면으로 각기둥을 잘랐을 때 자름면의 면적을 구하여라.

9. 평행6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 다음것을 밝혀라.

1) 평면 $BDA_1$ (　　) 평면 $CB_1D_1$

① 평행　　② 수직　　③ 수직이 아니다.　④ 가늠할수 없다.

2) 선분 $AC_1$은 평면 $CB_1D_1$에 의하여 ( )된다.

① 3개 부분들로 나누인다.　　② 3등분된다.

③ 2개 부분으로 나누인다.　　④ 가늠할수 없다.

10. 한 정점에서 나가는 세 모서리의 길이가 3cm, 4cm, 5cm인 직6면체의 대각선의 가운데점에서 매 정점까지의 거리를 구하여라.

11. 직평행6면체의 대각선들은 9cm, $\sqrt{33}$cm이고 밑면의 둘레의 길이는 18cm이다. 옆모서리의 길이가 4cm일 때 이 직평행6면체의 겉면적과 체적을 구하여라.

12. 밑면의 한 모서리가 $a$인 바른4각뿔을 밑면의 한 모서리를 지나며 맞은편 옆면에 수직인 평면으로 잘랐다. 자름면과 밑면이 이루는 각이 30°일 때 자름면의 면적을 구하여라.

13. 바른4각뿔의 옆모서리가 밑면과 이루는 각이 $\theta$이고 대각선면의 면적이 S이다. 이 각뿔의 겉면적과 체적을 구하여라.

14. 바른4각뿔에 바른6면체가 내접되였다. 바른6면체의 정점들은 4각뿔의 옆모서리에 있고 나머지 4개 정점들은 각뿔의 밑면에 놓여있다. 각뿔의 옆모서리는 $a$, 높이는 $h$이다. 바른6면체의 모서리를 구하여라.

15. 밑면의 직경과 높이가 같은 원기둥에 바른4각뿔이 내접하였는데 각뿔의 밑면은 원기둥의 아래밑면에 놓이고 각뿔의 정점은 원기둥의 웃밑면에 놓인다. 각뿔의 정점과 밑면의 대각선을 지나는 평면으로 자를 때 두 립체의 자름면의 둘레의 비를 구하여라. 또한 각뿔의 높이의 가운데점을 지나면서 밑면에 평행인 평면으로 자를 때 두 립체의 자름면의 면적의 비를 구하여라.

16. 원뿔대의 체적은 V이고 높이는 $h$이다. 원뿔대의 축을 지나는 자름면의 면적이 S라는것을 알고 원뿔대의 밑면의 반경을 구하여라.

17. 반경이 $r$인 구에 원뿔이 내접하였다. 원뿔의 축을 지나는 평면으로 잘랐을 때 생긴 3각형의 밑변과 높이와의 비는 $\frac{1}{2}$이다. 원뿔의 밑면의 반경을 구하여라.

18. 반경이 $r$인 구에 외접하는 원뿔의 밑면의 반경이 $R(R>r)$이다. 두 립체의 체적의 비를 구하여라.

19. 다음과 같은 립체의 밑면이 평면 H에 놓여있고 밑면의 중심이 평면 V에서 5cm의 거리에 있을 때 투영도를 그려라.

1) 밑면의 한변이 3cm(한변은 투영축에 평행), 높이가 5cm인 바른5각뿔

2) 밑면의 한변이 3cm(한변은 투영축에 평행), 높이가 7cm인 바른6각기둥

20. 그림 4-74와 같은 바른4각뿔대가 있다.

1) 밑면 $ABCD \subset H$, $AD \parallel XY$일 때 투영도를 그려라.

2) 이 투영도에 의하여 대각선 AG의 실제길이를 구하여라.

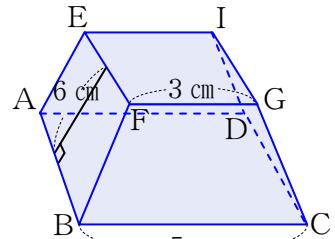



그림 4-74

**상 식**

힐베르트와 그가 내놓은 23 개 문제

힐베르트(1862년-1943년)는 현대수학발전에 특출한 공헌을 한 도이췰란드 수학자이다. 그의 과학연구는 인간의 무제한한 힘에 대한 확신, 수학과 자연과학파의 통일로 특징지어지고있다.

오늘의 대수학과 기하학이 공리론적인 리론체계와 모임론을 토대로 하여 건설되게 된것은 힐베르트의 공적이라고 하여도 과언이 아니다.

그는 1900년에 빠리에서 진행된 제2차 국제수학자대회에서 20세기앞에 나서는 수학연구의 목표와 과업을 밝히고나서 당면하게 매 분야에서 연구하여야 할 《힐베르트문제》라고 불리우는 23개 문제를 내놓았다.

그가 내놓은 23개 문제들가운데서 8번째 문제 《씨수분포에 관한 리만가설의 증명》만이 오늘까지 미해결로 남아있고 나머지 22개 문제는 기본적으로 해결되였다. 힐베르트가 내놓은 23개 문제는 20세기 수학발전을 크게 추동하였다.

# 제 5 장. 순렬과 조합

순렬

조합

2 마디공식

# 제1절. 순 렬

**알아보기** 서로 다른 네 수자 1, 2, 3, 4를 가지고 수자를 거듭 쓰지 않으면서 세 자리수를 몇개 만들수 있는가? 그림을 보고 설명하여라.

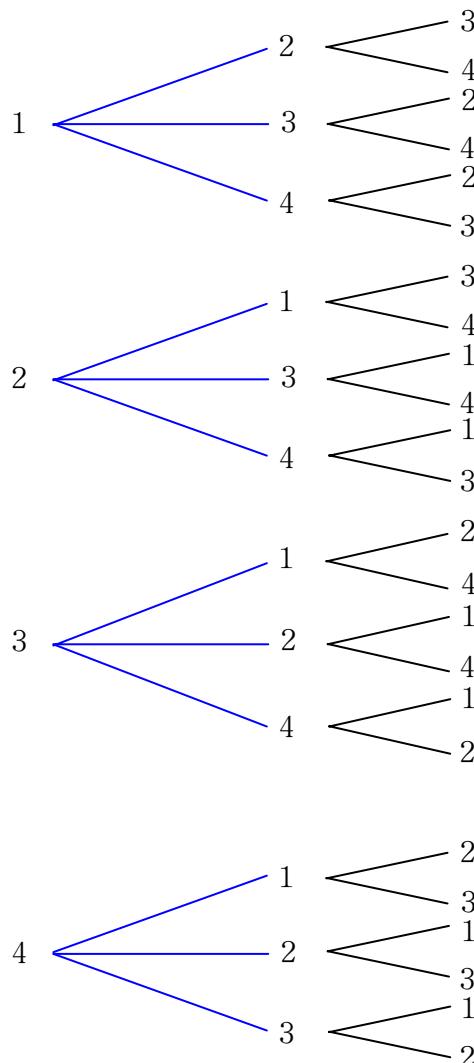



그림 5-1

일반적으로 어떤 대상들을 순서를 고려하여 배렬한것을 순렬이라고 부르고 이때 매 대상을 순렬의 원소라고 부른다. 이것을 정식화하면 다음과 같다.

**$n$개의 서로 다른 원소에서 $r(r\le n)$개의 원소를 일정한 순서에 따라 배렬한것을 서로 다른 $n$개의 원소에서 $r$개의 원소를 취한 순렬이라고 부른다. 이때 $n$개의 원소에서 $r$개의 원소를 취한 순렬의 총수를**

$$P_n^r \text{ (또는 } A_n^r\text{)}$$

**로 표시한다.**

이 정의에 의하면 우에서 고찰한것은

$$P_4^3=4\times3\times2=24$$

이다.

일반적으로 다음 공식이 성립한다.

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

(증명) $n$개의 원소를 $a_1, a_2, \cdots, a_n$로 표시하자. 이 $n$개 가운데서 먼저 한개 취하여 첫 자리에 배렬하는 방법은 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 가운데 어느것이라도 되므로 $n$가지이다. 둘째 자리에는 첫 자리에 배렬한것($a_1, a_2, \cdots, a_n$ 가운데 어느 한 원소)을 제외한 ($n-1$)개의 원소들가운데 어느것이라도 되므로 $n-1$가지 방법으로 배렬할수 있다. 이와 마찬가지로 셋째, 넷째, $\cdots$, $r$번째 자리에는 각각 $n-2$, $n-3$, $\cdots$, $n-(r-1)$가지 방법으로 배렬할수 있다.

그러므로 $n$개의 서로 다른 원소에서 $r$개씩 취하여 만든 순렬의 총 수는

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

만일 $n$개의 원소를 전부 배렬하는 순렬을 고찰한다면 $r=n$이므로 이러한 순렬의 총 수는 다음과 같다.

$$P_n^n=n(n-1)\cdots2\cdot1$$

$n(n-1)\cdots2\cdot1$을 $n!$로 표시하고 $n$차례곱(팍토리알)이라고 부른다.

차례곱을 써서 순렬의 총 수 $P_n^r$를 표시하면

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

**례 1** 다음것을 계산하여라.

1) $P_7^3$ 2) $P_5^5$ 3) $P_n^{n-1}$

(풀이) 1) $P_7^3=7\cdot6\cdot5=210$

2) $P_5^5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

3) $P_n^{n-1}=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2$

**례 2** 6명의 달리기선수가운데서 4명을 뽑아서 이어달리기경기에 내보내려고 한다. 달리는 차례까지 정한다면 달리기조를 짜는 방법은 몇가지인가?

(풀이) 4명의 선수를 달리는 차례까지 정하여 뽑는것은 6개에서 4개씩 뽑은 순렬을 만드는것과 같다.

따라서 $P_6^4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$

답. 360가지

## 문 제

1. 다음것을 계산하여라.

   1) $P_5^2$ 2) $P_6^5$ 3) $P_{10}^4$

2. 다음 같기식이 성립한다는것을 밝혀라.

   1) $P_n^{n-1}=P_n^n$ 2) $P_2^2+P_3^2+P_4^2=P_5^2$

3. 수자 0, 1, 2, 3, 4, 5를 가지고 같은 수자가 거듭 들어가지 않는 세자리수를 몇개 만들수 있는가?
4. 4개의 문자 $a, b, c, d$에서 3개씩 뽑는 순렬을 다 만들어라.
5. 4개의 수자 1, 2, 3, 4를 모두 써서 만든 네자리수가운데서 천의 자리는 1이 아니고 백의 자리는 2가 아니고 열의 자리는 3이 아니며 하나의 자리는 4가 아닌것을 모두 몇개나 만들수 있겠는가?

지금까지는 서로 다른 원소들가운데서 $r$개씩 취하여 만든 순렬을 고찰하였다.

이제 $n$개의 원소들가운데 같은 원소가 있는 경우에는 순렬의 총 수가 어떻게 되겠는가를 보자.

**례 3** 세 종류의 뻐스가 있다. 첫 종류의것은 3대, 둘째 종류의것은 2대, 셋째 종류의것은 1대 있다. 이 뻐스를 출발정류소에서 출발시키는 순서에는 몇가지 방법이 있겠는가?

(풀이) 이 뻐스들을

$$a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ c \qquad (1)$$

로 표시하면 구하려는 총 수는 이 문자들로 된 순렬의 총 수와 같다.

만일 뻐스들이 모두 다른것이라고 하고 그것을

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ c \qquad (2)$$

로 표시하면 이때 빠스(서로 다른것으로 생각하는)를 출발시키는 순서의 총 수는 (2)에 있는 순렬의 총수 6!과 같다. 그런데 이 수안에는 실제로 꼭같은 순서로 빠스를 출발시키는것이 반복되여있다. 이제 반복된 총 수를 찾아내자.

먼저 $a$에 대하여 중복된것들을 표시하겠다.

순렬

$$a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ c$$

를 보면 (2)에서 만든 순렬에서는 $a$에 번호를 붙여 $a_1,\ a_2,\ a_3$으로 하였기때문에 이것들의 순렬의 총 수 3!만 한 다음과 같은 순렬들이 순렬 (1)과 일치한다.

$$\left.\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, b, b, c \\ a_1, a_3, a_2, b, b, c \\ a_2, a_1, a_3, b, b, c \\ a_2, a_3, a_1, b, b, c \\ a_3, a_1, a_2, b, b, c \\ a_3, a_2, a_1, b, b, c \end{matrix}\right\} 3!\text{개}$$

$b$에 대해서도 마찬가지이므로 구하려는 (1)의 순렬의 총 수 $x$는 갈기식

$$6!=x\times3!\times2!$$

을 만족시킨다.

그러므로

$$x=\frac{6!}{3!2!}=6\times5\times2=60$$

답. 60가지

일반적으로 $n$개의 원소들가운데 같은것들이 각각 $p$개, $q$개, $r$개, …이 있고

$$p+q+r+\cdots=n$$

일 때 이 $n$개의 원소들로 만든 순렬의 총 수는

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}$$

례 4 수자 1이 4개, 2가 2개 있다. 이것으로 만들수 있는 여섯자리수는 몇개인가?

(풀이) 4+2=6이므로

$$\frac{6!}{4!2!}=15$$

답. 15개

**례 5** 7개의 수자 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2로 만들수 있는 일곱자리수는 몇개인가?

(풀이) 0이 왼쪽 첫자리에 오면 수를 만들수 없다.

첫자리에 1이 오는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!\,2!\,2!}=90$

첫 자리에 2가 오는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!\,3!\,1!}=60$

따라서 구하려는 수는

$$90+60=150$$

또는 다음과 같이 구할수도 있다.

왼쪽 첫 자리에 0이 오면 수를 이루지 못하므로 그 경우를 제외하면

$$\frac{7!}{2!\,3!\,2!}-\frac{6!}{1!\,3!\,2!}=210-60=150$$

답. 150개

## 문 제

1. 다음 차례곱을 계산하여라.
   1) 7!  2) 10!
2. 다음것들가운데서 옳은것을 지적하여라.
   1) $P_n^k$ ( $n\geq k$)은 늘 1보다 작지 않은 옹근수이다.
   2) $n$차례곱은 1부터 $n$까지의 수를 모두 곱한것이다.
   3) $P_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$
3. 다음 같기식을 증명하여라.
   1) $(n+1)!-n!=n\cdot n!$  2) $P_n^k=(n-k+1)P_n^{k-1}$
4. 5개의 수자 3, 3, 3, 5, 5로 만들수 있는 다섯자리수는 모두 몇개인가?
5. 붉은 기발 4개, 노란 기발 3개, 흰 기발 2개를 1렬로 배렬하여 만들수 있는 신호는 모두 몇가지인가?

원소들을 원형으로 배렬하는 순렬을 원순렬이라고 부른다.

5명의 학생이 원형으로 둘러서서 공을 찰 때 그들이 둘러서는 방법에는 몇가지가 있겠는가?

지금까지의 순렬에서는 $n$개의 원소들가운데서 같은 원소를 두번이상 반복 취하는 경우는 제외하였다. 같은 원소를 반복하여 취할수 있는 순렬을 **중복순렬**이라고 부른다.

중복순렬의 총 수가 얼마인가를 보자.

**례 6** 5개의 수 1, 2, 3, 4, 5를 반복하여 사용할수 있을 때 4자리수를 만드는 방법에는 몇가지가 있겠는가?

**(풀이)** 네자리수의 1 000의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5가운데 임의의 수자를 놓을수 있다. 따라서 그 방법에는 모두 5가지가 있다.

100의 자리에도 1, 2, 3, 4, 5가운데 임의의 수자를 놓을수 있으므로 그 방법 역시 5가지이다.

마찬가지로 10의 자리, 1의 자리에도 각각 5가지 방법으로 놓을수 있으므로 적의 법칙에 의하여 네자리수를 얻는 방법의 총 수에는

$$5\times5\times5\times5=5^4=625$$

답. 625가지

일반적으로 서로 다른 $n$개의 원소에서 $r$개씩 취하여 만드는 중복순렬의 총 수를 $\prod_n^r$로 표시하면

$$\prod_n^r=n^r$$

**(증명)** $n$개의 원소를 $a_1, a_2, \cdots, a_n$으로 표시하자.

첫자리에는 $n$개의 원소 $a_1, a_2, \cdots, a_n$가운데 어느 하나라도 놓일수 있으므로 그 방법은 $n$가지이다. 다음으로 둘째 자리를 고찰하여도 사정은 마찬가지이다. 이와 같은 과정을 $r$번 반복하게 되므로 구하려는 중복순렬의 총수 $\prod_n^r$는 적의 법칙에 의하여

$$\prod_n^r=\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r}=n^r$$

(주의) 중복순렬에서는 $n<r$일수도 있다.

**례 7** 수자 3, 5, 7, 9를 가지고 만들수 있는 세 자리수는 모두 몇개인가?

**(풀이)** 이것은 4개의 수에서 3개씩 뽑은 중복순렬이므로

$$\prod_4^3=4^3=64$$

답. 64개

## 문 제

1. 세가지 색갈을 가진 기발을 4번 써서 만들수 있는 신호의 종류에는 몇가지가 있겠는가?
2. 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개의 수자를 반복하여 쓸수 있을 때 세자리수를 만드는 방법에는 몇가지가 있겠는가?
3. 사과 2알, 배 2알, 복숭아 8알이 들어있는 그릇이 있다. 7명의 어린이들에게 그릇에서 임의로 7알을 꺼내여 1알씩 주는 방법은 모두 몇가지인가?
4. 수자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7가운데서 같은 수자가 거듭 들어가는것을 허용할 때 짝수인 네자리수는 몇개인가?

## 련습문제

1. 다음것을 계산하여라.

   1) $\dfrac{P_9^5+P_9^4}{P_7^6+P_7^5}$　　2) $\dfrac{P_{10}^5-P_{10}^4}{P_8^5+P_8^6}$

   3) $(P_4^4-P_3^3)(P_n^2-P_n^1)$　　4) $\dfrac{P_n^4-P_n^3}{P_n^2}$

2. $x$, $m\in$N, $m<19<x$일 때 $(x\text{-}m)(x\text{-}m\text{-}1)\cdots(x-19)$를 순렬을 써서 표시하면 어느것이 옳은가?

   1) $P_{x-m}^{x-19}$　　2) $P_{x-m}^{20-m}$　　3) $P_{x-m}^{19-m}$　　4) $P_{x-m}^{18-m}$

3. 다음 방정식을 풀어라.

   1) $P_x^2=56$　　2) $P_x^3=xP_3^2$　　3) $P_{2x}^3=10P_x^3$　　4) $(P_x^5+P_x^4)\div P_x^3=1$

4. $5(P_n^3+P_{n+1}^4)=12P_{n+1}^3$에 맞는 $n$의 값을 구하여라.
5. 달림길이 네줄로 되여있는 경기장에서 4명의 선수들이 차지하는 방법은 몇가지인가?
6. 수자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 수자를 뽑아서 만든 다섯자리수가운데서 25의 배수는 몇개인가?
7. 8개의 수자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7을 가지고 같은 수자가 거듭 들어가지 않는 네자리수를 몇개 만들수 있는가?
8. 수자 1을 2개, 0, 2, 3을 1개씩 써서 만들수 있는 다섯자리수는 모두 몇개인가?
9. 7개의 수자 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3을 써서 만들수 있는 일곱자리수는 모두 몇개인가?
10. 5개의 수자 0, 1, 2, 3, 4가운데서 같은 수자가 거듭 들어가는것을 허용할 때 4자리수는 모두 몇개인가?

11. 같은 수자가 거듭 들어가는것을 허용할 때 4개의 수자 1, 2, 3, 4를 가지고 다섯자리수는 몇개 만들수 있는가?

12. $x+y+z+u=7$을 만족시키는 $x$, $y$, $z$, $u$ 의 자연수풀이는 몇묶음 있는가?

## 제 2 절. 조 합

**알아보기** 선수 4명가운데서 출전선수 3명을 선발하는 방법에는 몇가지가 있겠는가? 부분모임을 찾으면 되겠는가?

$n$개의 원소가운데서 $r$개의 원소를 취하되 순서를 고려하지 않은 매개 렬을 $n$개의 원소에서 $r$개 취한 조합이라고 부르며 이때 조합의 총 수를

$$C_n^r \quad (\text{또는 } \binom{r}{n})$$

로 표시한다.

(주의) 조합에서는 순렬과는 달리 취한 원소들의 순서를 고려하지 않는다.

일반적으로 다음 공식이 성립한다.

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

(증명) 이 공식을 증명하기 위하여 $n$개의 서로 다른 원소가운데서 $r$개의 원소를 취한 순렬의 총수를 두가지 방법으로 구하자.

먼저 $n$개의 서로 다른 원소에서 $r$개의 원소를 취한 순렬의 총 수는 공식에 의하여

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad (1)$$

한편 $n$개의 서로 다른 원소에서 $r$개 취한 조합의 총 수를 $x$라고 하면 그 가운데의 매개 조합은 $r$개의 원소를 가진다. 이 매개 조합에 대하여 순렬을 만들면 매번 $r!$개의 순렬을 얻으며 따라서 순렬의 총 수는

$$x \times r! \qquad (2)$$

(1)과 (2)로부터

$$x \times r! = P_n^r$$

즉

$$x = C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

**례 1** 40개의 제품이 들어있는 제품상자에서 3개의 제품을 꺼내여 검사한다. 3개의 제품을 꺼내는 방법은 몇가지 있는가?

(풀이) 제품을 꺼내는 방법의 수는 40개의 원소에서 3개씩 뽑은 조합의 총수와 같으므로

$$C_{40}^3 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9\ 880$$

답. 9 880가지

**례 2** 6개의 평행직선과 5개의 평행직선이 사귈 때 얻어지는 평행4변형의 총수를 구하여라.

(풀이) 이때 매개 평행4변형은 6개의 평행직선들가운데서 어느 2개와 5개의 평행직선들가운데서 어느 2개에 의하여 얻어진다. 그런데 6개의 평행직선에서 2개씩 뽑는 방법은 $C_6^2$ 가지이고 5개의 평행직선에서 2개씩 뽑는 방법은 $C_5^2$ 가지이므로 평행4변형의 총수는

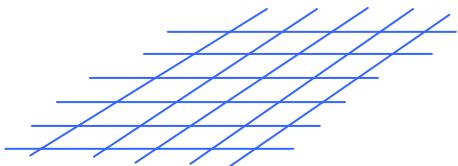



그림 5-2

$$C_6^2 \times C_5^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 150$$

답. 150가지

## 문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $C_5^4$　　2) $C_7^4$　　3) $C_{10}^2$

2. 볼록 $n$각형은 대각선을 몇개 가지는가?

3. 4명의 학생이 수학, 물리, 화학소조에 참가하는데 매 사람이 한가지를 선택한다면 서로 다른 선택방법은 몇가지인가?

조합의 공식을

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

로 표시할수도 있다.

만일 $C_n^0 = 1$이라고 하면 우의 공식의 오른변에서도 $r$=0일 때

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$$

이므로 우의 공식은 $r$=0인 경우에도 그대로 성립한다. 이때 0!=1로 본다.

다음의 같기식들도 성립한다.

$$1^\circ \quad C_n^r = C_n^{n-r}$$

(증명) 조합의 공식으로부터

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,[n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

이므로

$$C_n^r = C_n^{n-r}$$

$$2^\circ \quad C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1}$$

(증명) $C_{n+1}^r = \dfrac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$이고

$$C_n^r + C_n^{r-1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n\,!(n-r+1)+n!r}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!}$$

이므로

$$C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1}$$

**례 3** 다음것을 계산하여라.

1） $C_{80}^{78}$　　2） $C_{1\ 000}^{999}$

（풀이） 1） $C_{80}^{78} = C_{80}^{2} = \frac{80\cdot 79}{1\cdot 2} = 3\,160$

2） $C_{1\ 000}^{999} = C_{1\ 000}^{1} = 1\ 000$

## 문 제

1． 다음것을 계산하여라.

1） $C_{28}^{27}$　　2） $C_{85}^{83}$　　3） $C_{600}^{598}$　　4） $C_{10\ 000}^{9\ 999}$

2． 다음 명제에서 옳은것을 찾아라.

1） $n$개에서 $k$개씩 뽑은 조합은 $n$개에서 $k$개씩 뽑은 순렬의 $k!$배와 같다.

2） $C_m^3 + C_m^4 = C_{m+1}^5$

3） $C_n^m = C_n^k$ 이면 $m=k$ 이다.

4） $\frac{C_m^{r+1}}{C_m^r} = \frac{m-r}{r+1}$

3． $n$+1개의 원소로 된 모임 $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ b\}$ 에서 $k$+1개씩 뽑아서 만든 조합의 총 수 $C_{n+1}^{k+1}$을 $b$를 포함하는 조합의 총 수와 $b$를 포함하지 않는 조합의 총 수를 따로 구하여 더하는 방법으로 표시하여라.

4． 다음 같기식이 성립한다는것을 증명하여라.

1） $C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$　　2） $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$

## 련 습 문 제

1． 6개의 원소로 된 모임 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ 에서 4개씩 뽑은 조합을 다 써라.

2． 다음 같기식에서 늘같기식이 아닌것을 지적하여라.

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$ ($m \le n$)　　2) $(n+2)(n+1) P_n^m = P_{n+2}^{m+2}$ ($m \le n$)

3) $C_n^m = \dfrac{P_n^m}{n!}$ ($m \le n$)　　4) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ ($1 \le m < n$)

다음것을 계산하여라. (3-4)

3. 1) $C_n^{n-2}$　　2) $C_{60}^{59} + C_{60}^1$　　3) $C_n^{k+1} - C_{n-1}^k$

4. 1) $C_{10}^3 + C_{10}^2 + C_{10}^1 + C_{10}^0$　　2) $C_5^1 + 2C_5^2 + 3C_5^3 + 4C_5^4 + C_5^5$

5. 계산을 하지 말고 다음 같기식이 옳다는것을 증명하여라.

1) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$

2) $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 = C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7$

6. 다음 같기식이 성립한다고 말할수 있는가?

1) $C_{10}^3 = P_5^3$　　2) $C_m^3 + C_m^4 = C_{m+1}^5$

3) $C_{m+3}^5 = C_{m+3}^{m-2}$　　4) $C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_m^n$

7. 다음 방정식을 풀어라.

1) $11C_x^3 = 24C_{x+1}^2$　　2) $P_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$

3) $\begin{cases} P_x^y = 272 \\ C_x^y = 136 \end{cases}$　　4) $\begin{cases} P_x^y \div P_x^{y-1} = 10 \\ C_x^y \div C_x^{y-1} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

5) $\begin{cases} P_{2x}^{3y} \div P_{2x}^{3y-1} = 8 \\ C_{2x}^{3y} \div C_{2x}^{3y-1} = \dfrac{8}{9} \end{cases}$　　6) $C_{x+2}^y : C_{x+2}^{y+1} : C_{x+2}^{y+2} = 3 : 5 : 5$

8. $2C_n^2 + 9C_n^3 + 12C_n^4 + 5C_n^5 = \dfrac{1}{24} n^2 (n^2 - 1)(n+2)$ 가 성립한다는것을 증명하여라.

9. 20명의 병사와 3명의 사관이 있다. 3명의 병사와 1명의 사관으로 습격조를 조직하는 방법은 몇가지인가?

10. 몇개의 단체가 련맹전의 방법으로 롱구경기를 하려고 한다. 경기를 모두 36번 한다면 몇개의 단체가 참가하겠는가?

11. 15명으로 조직된 한 분조가 A, B, C 세 장소에 갈라져서 일하려고 한다. A에는 8명, B에는 4명, C에는 3명 배치한다면 배치하는 방법에는 몇가지 있겠는가?

12. 평면에 서로 다른 $n$개의 점이 있다.

1) 어느 세 점도 한 직선에 놓이지 않을 때 이 점들을 정점으로 하는 3각형을 몇개 그릴수 있는가?

2) $k$개의 점이 한 직선에 놓일 때 이 직선의 $k$개의 점을 정점으로 하는 3각형을 몇개 그릴수 있는가?

**13.** 원에 내접하는 10각형의 세 정점을 맺는 3각형가운데서

1) 10각형과 두 변을 함께 가지는것은 몇개인가?

2) 10각형과 한 변을 함께 가지는것은 몇개인가?

3) 10각형의 변을 가지지 않는것은 몇개인가?

**14.** 바른 6면체의 정점들을 세 정점으로 하는 3각형은 모두 몇개인가? 그가운데서 바른6면체의 면에 놓이지 않는것은 몇개인가?

다음의 식이 성립한다는것을 증명하여라.

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$$

## 제 3 절. 2 마디공식

**알아보기** 적 $(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)$에서 $a^3, a^2, a$의 결수들을 말하여라.

일반적으로

$$(a+b_1)(a+b_2)\cdots(a+b_n)=a^n+(b_1+b_2+\cdots+b_n)a^{n-1}+(b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_{n-1}b_n)a^{n-2}+\cdots+b_1b_2\cdots\cdots b_n$$

(증명) 수학적귀납법으로 증명하자.

$n$=1, 2일 때는 성립한다.

이제 $n=k$일 때 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때에도 성립한다는것을 증명하자. 가정에 의하여

$$(a+b_1)(a+b_2)\cdots(a+b_k)(a+b_{k+1})=$$

$$=[a^k+(b_1+\cdots+b_k)a^{k-1}+(b_1b_2+\cdots+b_{k-1}b_k)\,a^{k-2}+\cdots+b_1\cdots b_k](a+b_{k+1})$$

$$=a^{k+1}+(b_1+\cdots+b_k)a^k+(b_1b_2+\cdots+b_{k-1}b_k)a^{k-1}+\cdots+b_1\cdots b_ka$$

$$+\ a^k b_{k+1} + (b_1 + \cdots + b_k) a^{k-1} b_{k+1} + \cdots + b_1 \cdots b_k b_{k+1}$$

$$= a^{k+1} + (b_1 + \cdots + b_k + b_{k+1}) a^k + (b_1 b_2 + \cdots + b_{k-1} b_k + b_1 b_{k+1} + \cdots + b_k b_{k+1}) a^{k-1}$$

$$+ \cdots + b_1 \cdots b_k b_{k+1}$$

따라서 $n=k+1$인 경우에도 성립한다.

그러므로 주어진 식은 임의의 자연수 $n$에 대하여 성립한다.

**알아보기** 우의 식에서 매개 마디의 결수를 얻는 방법을 말하여라.

우의 식에서 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b$ 라고 놓으면 다음의 공식을 얻는다.

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + b^n$$

이 공식을 **뉴톤의 2마디공식**(간단히 **2마디공식**)이라고 부른다.

이 전개식의 $r+1$번째 마디 $C_n^r a^{n-r} b^r$ 을 **일반마디**라고 부르며 매 결수

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \cdots,\ C_n^r,\ \cdots,\ C_n^{n-1},\ C_n^n$$

을 **2마디곁수**라고 부른다.

**례 1** $(x+2)(x-5)(x+6)$을 전개하여라.

**(풀이)** $(x+2)(x-5)(x+6) = x^3 + (2-5+6)x^2 + [2 \cdot (-5) + 2 \cdot 6 + (-5) \cdot 6]x$

$$+2 \cdot (-5) \cdot 6 = x^3 + 3x^2 - 28x - 60$$

**례 2** 다음 식을 전개하여라.

1) $(a+b)^4$ 2) $(a-b)^5$

**(풀이)** 1) $(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

2) $(a-b)^5 = [a + (-b)]^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 (-b) + C_5^2 a^3 (-b)^2$

$$+ C_5^3 a^2 (-b)^3 + C_5^4 a(-b)^4 + C_5^5 (-b)^5$$

$$= a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5$$

**례 3** $(3x+2y)^6$을 전개하여라.

**(풀이)** $(3x+2y)^6 = C_6^0 (3x)^6 + C_6^1 (3x)^5 (2y) + C_6^2 (3x)^4 (2y)^2 + C_6^3 (3x)^3 (2y)^3$

$$+ C_6^4 (3x)^2 (2y)^4 + C_6^5 (3x)(2y)^5 + C_6^6 (2y)^6$$

$$=729x^6+2916x^5y+4860x^4y^2+4320x^3y^3+2160x^2y^4$$
$$+576xy^5+64y^6$$

## 문 제

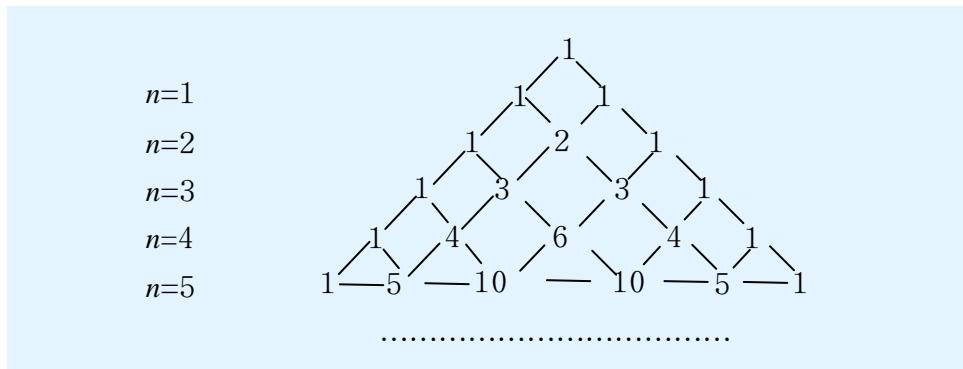
1. $(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)(a+b_4)$ 를 전개하여라.
2. $(3x-1)^5$을 전개하여라.
3 $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{x}\right)^4$ 을 전개하여라.
4. $(1+\sqrt{a})^4+(1-\sqrt{a})^4$ 을 전개하여라.

2마디공식으로부터 다음의 식들이 성립한다.

1° $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$

사실 공식에서 $a=1$, $b=1$이라고 놓으면 1°이 얻어진다.

2° $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0$

2마디공식으로부터 결수들은 다음과 같은 도식에 따른다.

이 형태를 파스칼3각형이라고 부른다.

**례 4** $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^9$ 의 전개식에서 $x^9$의 결수와 가운데마디를 구하여라.

(풀이) 전개식의 일반마디는

$$C_9^r(x^2)^{9-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^rC_9^rx^{18-3r}$$

이 식에서 $x^9$의 결수를 구하려면

$$18-3r=9$$

즉 $r=3$을 취한다.

그러므로 $x^9$의 결수는

$$(-1)^3 C_9^3 = -\frac{9\times8\times7}{3!} = -84$$

다음으로 이 전개식의 마디수는 10이므로 가운데마디는 다섯째 마디와 여섯째 마디이다.

그러므로 우에서 얻은 전개식의 일반마디에서 $r=4$, $r=5$로 놓으면 다섯째 마디는

$$(-1)^4 C_9^4 x^6 = 126x^6$$

여섯째 마디는

$$(-1)^5 C_9^5 x^3 = -126x^3$$

## 문 제

1. $(2a^3-3b^2)^{11}$의 전개식에서 여섯째 마디를 구하여라.
2. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^8$의 전개식에서 $a$를 포함하지 않는 마디를 구하여라.
3. $\left(2x-\frac{1}{3x}\right)^{10}$의 전개식에서 $x^4$마디의 결수를 구하여라.
4. $1+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n=3^n$을 증명하여라.
5. $1+5C_n^1+5^2C_n^2+\ldots+5^nC_n^n=6^n$을 증명하여라.
6. 2마디공식을 수학적귀납법으로 증명하여라.

## 련습문제

1. 다음 식을 전개하여라.

1) $(x+3)^5$

2) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^5$

3) $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x}\right)^8$ 4) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^7$

2. 다음 식을 계산하여라.

1) $\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)^7+\left(1-a^{\frac{1}{2}}\right)^7$ 2) $\left(2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^4-\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^4$

3. $(2a^3-3b^2)^8$의 전개식에서 세번째 마디를 구하여라.

4. $\left(2x^2-\frac{1}{3x}\right)^7$의 전개식에서 $x^8$의 마디를 구하여라.

5. $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^7$의 전개식에서 $x$가 들어있지 않는 마디를 구하여라.

6. $(1+x)^n$의 전개식에서 넷째 마디와 여섯째 마디의 곁수가 같다. $n$을 구하여라.

7. $\left(3x^2-\frac{1}{2x^3}\right)^n$의 전개식이 상수마디를 포함하게 되는 정의 옹근수 $n$의 최소값과 그때의 상수마디를 구하여라.

8. $\left(3x^2-\frac{1}{2x^2}\right)^8$의 전개식에서 일반마디와 가운데마디를 구하여라.

9. $(2+x)^{10}$의 전개식에서 가장 큰 곁수를 가지는 마디를 구하여라.

10. $(x+2y)(2x+y)^2(x+y)^5$의 전개식에서 모든 곁수들의 합을 구하여라.

11. $(\sqrt{x}+2)^5$의 전개식에서 두번째 마디의 값이 1 000보다 크게 되는 $x$의 범위를 구하여라.

## 복 습 문 제

1. 1부터 9까지의 수자를 써서 같은 수자가 거듭 들어가지 않는 네자리홀수를 몇개 만들수 있는가?

2. 7명의 학생을 나란히 세우는 방법은 몇가지 있는가? 키가 가장 큰 학생이 끝에 있도록 나란히 세우는 방법은 몇가지인가?

3. $(a+b+c)^{10}$의 전개식에서 $a^4b^3c^3$마디의 결수를 구하여라.

4. 수자 0, 1, 2, 3을 가지고 5자리수를 몇개나 만들수 있는가?

5. 최우등생 10명과 우등생 6명가운데서 각각 3명씩 뽑는 방법은 몇가지 있는가?

6. 10명의 학생을 3개의 호실 A, B, C에 배치하려고 한다.

1) A에 4명, B, C에 각각 3명씩 배치하는 방법은 몇가지 있는가?

2) 지적된 한 학생을 A에 배치하고 나머지 9명을 A, B, C에 각각 3명씩 배치하는 방법은 몇가지인가?

7. 어떤 소조에 10명의 학생이 있는데 그가운데서 3명이 녀학생이다. 2명의 대표를 선출하려고 한다. 적어도 1명이 녀학생이 되게 하는 선출방법은 몇가지인가?

8. 서로 다른 $2n$개의 원소에서 $n$개씩 뽑은 조합가운데서 지적된 한 원소를 포함하는 조합의 수와 포함하지 않는 조합의 수는 같다는것을 증명하여라.

9. 다음 같기식에서 늘같기식이 아닌것을 찾아라.

1) $C_n^m = C_n^{n-m} \qquad (m \le n)$

2) $(n+2)(n+1)P_n^m = P_{n+2}^{m+2} \qquad (m \le n)$

3) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} \qquad (1 \le m < n)$

10. 세계축구선수권대회 본선경기에는 32개 팀이 참가하여 먼저 4개 팀씩 8개 조로 나누어 조별련맹전을 하고 매 조에서 1등과 2등을 한 팀이 모여서 승자전의 방법으로 1등과 2등, 3등과 4등을 결정한다. 매 선수권대회에서는 총 몇번의 경기를 하는가?

11. 다음 식의 전개식에서 모든 결수들의 합을 구하여라.

$$(2x-y)^5(x+2y)^2(x+y)$$

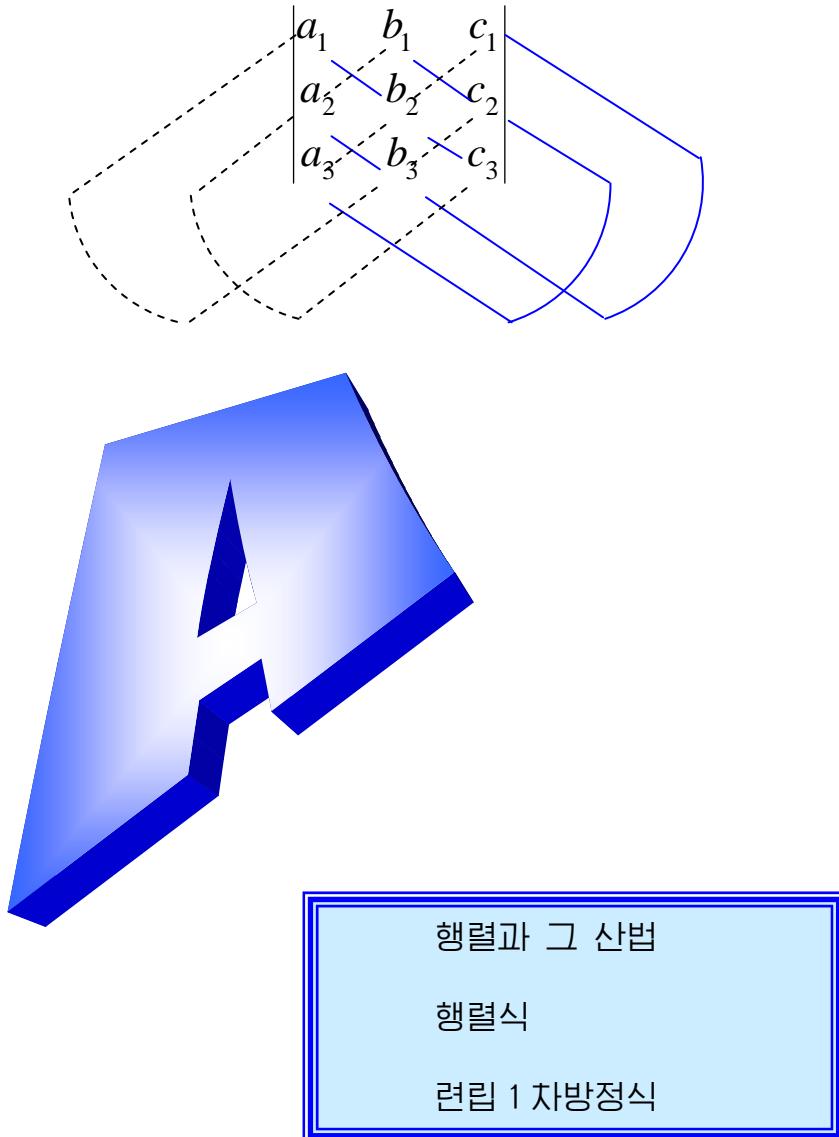
12. 다음 공식을 증명하여라.

1) $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-2}^{r-1} + C_{n-3}^{r-2} + \cdots + C_{n-r}^1$

2) $C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_{n-1}^r + C_{n-2}^r + \cdots + C_{r+1}^r + C_r^r$

13. $\left(5x^2 - \dfrac{1}{2x}\right)^9$의 전개식에서 $x^3$의 결수를 구하여라.

14. $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식이 상수마디를 포함한다는것을 증명하고 이때의 상수마디를 구하여라.

# 제 6 장. 행렬과 련립방정식

## 제 1 절. 행렬과 그 산법

### 1. 행 렬

**알아보기** 1. 다음의 표는 물질 $H_2$, $CO$, $CO_2$, $H_2O$, $H_2CO_3$들에 들어있는 수소(H), 탄소(C), 산소(O)의 개수를 표시한것이다.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{표 1}$$

(1) 이 표에서 가로줄의 수들은 무엇을 의미하는가를 말하여라.

(2) 이 표에서 세로줄의 수들은 무엇을 의미하는가를 말하여라.

2. 다음의 표는 세 종류의 집짐승먹이 X, Y, Z들에 포함되여있는 비타민 A, B, C들의 량을 표시한것이다.

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{pmatrix} \qquad \text{표 2}$$

(1) 이 표를 보고 먹이 X에 포함되여있는 비타민들의 총량을 구하여라.

(2) 이 표를 보고 먹이 X, Y, Z들에 포함되여있는 비타민 B의총량을 구하여라.

> 행렬은 량들의 호상관계를 표시하는데 리용된다.
> $m\times n$개의 수들로 $m$개의 가로줄과 $n$개의 세로줄의 사귐점들에 배렬한 직4각형모양의 표를 $(m, n)$형행렬이라고 부른다.

행렬에서 가로줄을 **행**, 세로줄을 **렬**이라고 부른다. 행렬에 들어있는 매개 수를 그 행렬의 **원소**라고 부른다. 행과 렬의 개수가 같은 행렬을 **바른행렬**이라고 부르며 $(n, n)$형바른행렬을 $n$**차행렬**이라고 부른다.

$(m, n)$형행렬을 다음과 같이 표시한다.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

또는 간단히

$$A=(a_{ij}) \quad \begin{cases} i=1, 2, \cdots, m \\ j=1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

여기서 매 원소의 밑에 붙은 수들을 **첨수**라고 부르는데 그것은 그 원소가 어느 행, 어느 렬의 원소인가를 표시한다.

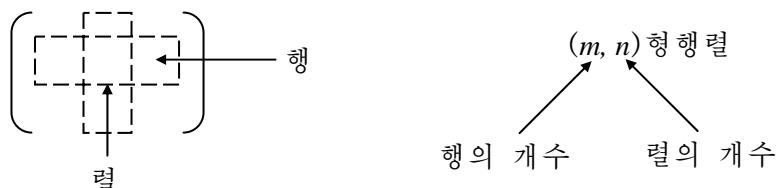
첫째 첨수는 행의 번호이고 둘째 첨수는 렬의 번호이다.

**례 1** 표 1의 행렬은 3개의 행과 5개의 렬을 가지는 (3, 5)형행렬이다. 표 1의 행렬은 원소 H, C, O들에 관한 물질 $H_2$, CO, $CO_2$, $H_2O$, $H_2CO_3$ 들의 원자행렬이다.

표 2의 행렬은 (3, 3)형바른행렬 즉 3차행렬이다. 표 2의 행렬은 비타민 A, B, C들에 관한 먹이 X, Y, Z들의 먹이행렬이다.

**례 2** 행렬 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$은 4개의 행과 1개의 렬을 가지는 (4, 1)형행렬이고 행렬

$$(3 \quad 2 \quad -5 \quad 0 \quad 1)$$

은 1개의 행과 5개의 렬을 가지는 (1, 5)형행렬이다.

같은 형의 두 행렬 A와 B에서 같은 자리에 있는 원소들끼리 모두 같을때 두 행렬 A와 B는 같다고 말하고 이것을 A = B로 표시한다.

**례 3** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & x \\ y & z \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = \omega,\ \ b = x,\ \ c = y,\ \ d = z$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

## 문 제

1. 다음의 지적된 형의 행렬들을 써라.

(3, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 3)

2. 다음 행렬들은 어떤 형의 행렬들인가?

1) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & -10 \end{pmatrix}$  2) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  5) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. 다음 같기식이 성립하는 $x$, $y$, $u$, $v$를 구하여라.

1) $\begin{pmatrix} x & -3 \\ 5 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3u \\ -\frac{v}{3} & 5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} x+y & 4 \\ 1 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u-3v \\ 2u+v & -5 \end{pmatrix}$

## 2. 행렬의 더하기

**례 1** 세가지 종류의 제품 X, Y, Z를 생산하는 두 공장의 지난해 상반년도와 하반년도의 생산실적들은 다음 표와 같다.

(상반년도)

| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| 첫째 공장 | 35 | 18 | 26 |
| 둘째 공장 | 40 | 15 | 23 |

(하반년도)

| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| 첫째 공장 | 32 | 25 | 30 |
| 둘째 공장 | 45 | 22 | 25 |

이때 두 공장의 지난해 생산실적들은 다음 표와 같다.

| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| 첫째 공장 | 67 | 43 | 56 |
| 둘째 공장 | 85 | 37 | 48 |

이 표들을 행렬로 표시하면 다음과 같다.

$$A=\begin{pmatrix} 35 & 18 & 26 \\ 40 & 15 & 23 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 32 & 25 & 30 \\ 45 & 22 & 25 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 67 & 43 & 56 \\ 85 & 37 & 48 \end{pmatrix}$$

여기서 행렬 C는 행렬 A와 B에서 같은 자리에 있는 원소들끼리 더하여 얻어진것이다.

즉

$$\begin{pmatrix} 35+32 & 18+25 & 26+30 \\ 40+45 & 15+22 & 23+25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 67 & 43 & 56 \\ 85 & 37 & 48 \end{pmatrix}$$

같은 형의 두 행렬 A와 B에서 같은 자리에 있는 원소들끼리 더하여 얻은 행렬을 두 행렬 A와 B의 합이라고 부르고 $A+B$로 표시한다.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

**례 2** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$일 때 A+B와 B+A를 구하여라.

(풀이)

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 & 1+0 \\ 3+4 & (-2)+3 \\ 5+(-2) & (-1)+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B+A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 \\ 4+3 & 3+(-2) \\ (-2)+5 & 4+(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

## 문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & -7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

2. 1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$일 때 A+B와 B+A를 구하여라.

2) 임의의 2차행렬 A, B에 대하여 A+B=B+A가 성립한다는것을 증명하여라.

3. 1) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$일 때

(A+B)+C, A+(B+C)를 구하여라.

2) 임의의 (2, 3)형행렬 A, B, C에 대하여 다음 같기식이 성립한다는것을 증명하여라.

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

### 3. 행렬에 수를 곱하기

**례 1** 두 종류의 먹이 X, Y들에 들어있는 비타민 A, B, C들의 함량은 다음 표와 같다.

|  | X | Y |
|---|---|---|
| A | 4 | 3 |
| B | 3 | 6 |
| C | 7 | 4 |

표 3

먹이생산공정을 현대화하여 이 먹이들에 들어있는 비타민들의 함량을 평균 12% 높였다면 주어진 먹이들에 들어있는 비타민들의 량은 다음 표와 같다.

|  | X | Y |
|---|---|---|
| A | 4.48 | 3.36 |
| B | 3.36 | 6.72 |
| C | 7.84 | 4.48 |

표 4

표 3과 표 4를 행렬로 표시하면 다음과 같다.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4.48 & 3.36 \\ 3.36 & 6.72 \\ 7.84 & 4.48 \end{pmatrix}$$

여기서 행렬 B는 행렬 A의 매개 원소에 1.12를 곱하여 얻은것이다.

행렬 A의 매개 원소에 수 $k$를 곱하여 얻은 행렬을 행렬 A에 수 $k$를 곱한 적이라고 부르고 이것을 $k$A로 표시한다.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{일 때 } kA = k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

**례 2** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$일 때 3A와 (−2)A를 계산하여라.

(풀이) $3A=3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

$$(-2)A=(-2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 0 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

(주의) 행렬 A에 수 $\frac{1}{k}(k \neq 0)$을 곱할 때 $\frac{A}{k}$로 쓰지 말고 반드시 $\frac{1}{k}A$로 써야 한다.

행렬 A에 수 −1를 곱한 행렬을 행렬 A의 **반대행렬**이라고 부르고 그것을 −A로 표시한다.

**례 3** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$일 때

$$-A=(-1)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

행렬 A와 행렬 B의 반대행렬의 합 A+(−B)를 A−B로 표시한다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \omega & x \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-\omega & b-x \\ c-y & d-z \end{pmatrix}$$

**례 4** $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$일 때

A-B와 2B-3A, B-B를 계산하여라.

(풀이) $A-B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & 3-0 \\ 1+1 & 4-3 \\ 0-2 & 1-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$$2B-3A=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -5 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B-B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-1 & 0-0 \\ -1-(-1) & 3-3 \\ 2-2 & 6-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이와 같이 모든 원소가 령인 행렬을 **령행렬**이라고 부르고 그것을 글자 O로 표시한다.

행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$은 (2, 3)형령행렬이고 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$은 2차령행렬이다.

A가 임의의 형의 행렬이고 O가 A와 같은 형의 령행렬이면

$$A+O=O+A=A$$

가 성립한다.

또한

$$A+(-A)=(-A)+A=O$$

## 문 제

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$일 때 다음것을 계산하여라.

   1) $2A$　　2) $C-\frac{1}{2}A$　　3) $OC-3B$

   4) $B-2C$　　5) $\frac{3}{2}(A+B)$　　6) $\frac{3}{2}A+\frac{3}{2}B$

2. A와 B가 모두 (3, 2)형행렬들일 때 임의의 수 $k$에 대하여 $k(A+B)=kA+kB$가 성립한다는것을 밝혀라.

3. A가 임의의 행렬일 때 임의의 두 수 $k$, $\ell$들에 대하여

$$k(\ell A)=\ell(kA)=(k\ell)A$$

   가 성립한다는것을 밝혀라.

### 4. 행렬의 곱하기

**례 1** 두 종류의 제품 M, N을 하나씩 생산하는데 필요한 자재 X와 Y의 량은 표 5에서와 같고 X, Y를 한 단위씩 생산하는데 필요한 원료 $a$, $b$, $c$의 량은 표 6에서와 같다.

| | X | Y |
|---|---|---|
| M | 5 | 3 |
| N | 4 | 6 |

표 5

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| X | 2 | 1 | 7 |
| Y | 8 | 3 | 9 |

표 6

제품 M, N들을 하나씩 생산하는데 필요한 원료 $a$, $b$, $c$의 량을 구하자.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$1M=5X+3Y,\quad 1X=2a+b+7c,\quad 1N=4X+6Y,\quad 1Y=8a+3b+9c$$

와 같이 표시하면

$$1M=5(2a+b+7c)+3(8a+3b+9c)$$
$$1N=4(2a+b+7c)+6(8a+3b+9c)$$

즉

$$1M=(5\cdot2+3\cdot8)a+(5\cdot1+3\cdot3)b+(5\cdot7+3\cdot9)c$$
$$1N=(4\cdot2+6\cdot8)a+(4\cdot1+6\cdot3)b+(4\cdot7+6\cdot9)c$$

이리하여 제품 M, N을 하나씩 생산하는데 필요한 원료 $a$, $b$, $c$ 들의 량은 다음 표와 같다.

|   | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| M | 34 | 14 | 62 |
| N | 56 | 22 | 82 |

표 7

이제

$$C=\begin{pmatrix} 34 & 14 & 62 \\ 56 & 22 & 82 \end{pmatrix}$$

로 놓고 행렬 C가 행렬 A, B에 의하여 어떤 방법으로 얻어졌는가를 보자.

$$C_{11}=34=5\cdot 2+3\cdot 8$$

에서 첫째 인수들은 행렬 A의 1행 (5 3)의 원소들이고 둘째 인수들은 행렬 B의 1렬 $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$의 원소들이다.

$$C_{21}=56=4\cdot 2+6\cdot 8$$

에서 첫째 인수들은 행렬 A의 2행 (4 6)의 원소들이고 둘째 인수들 은 행렬 B의 1렬 $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$의 원소들이다.

$$C_{23}=82=4\cdot 7+6\cdot 9$$에서

첫째 인수들은 행렬 A의 2행(4 6)의 원소들이고 둘째 인수들은 행렬 B의 3렬 $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$의 원소들이다.

이와 마찬가지로 행렬 C의 원소 $c_{ij}$는 행렬 A의 $i$ 째 행의 원소들과 행렬 B의 $j$째 렬의 원소들을 차례로 하나씩 곱하여 더한 합과 같다. 즉

$$c_{ij}= a_{ij} b_{1j}+ a_{i2} b_{2j}=\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} \quad \begin{cases} i=1,\ 2 \\ j=1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

**$(m,\ s)$형행렬 A와 $(s,\ n)$형행렬 B에 대하여 행렬 A의 $i$째 행의 원소들과 행렬 B의 $j$째 렬의 원소들을 차례로 곱하여 더한 합 $c_{ij}$를 원소로 하는 $(m,\ n)$형행렬 C를 두 행렬 A와 B의 적이라고 부르고 AB로 표시한다.**

$$C=AB$$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \quad \begin{cases} i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{cases}$$

행렬의 곱하기는 첫째 행렬의 렬의 개수와 둘째 행렬의 행의 개수가 같은 경우에만 할수 있다.

$$(m,\ s)\text{형 행렬} \times (s,\ n)\text{형 행렬} = (m,\ n)\text{형 행렬}$$

례 2 $(a\ \ b\ \ c)\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = (ap+bq+cr)$, $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}(a\ \ b\ \ c) = \begin{pmatrix} pa & pb & pc \\ qa & qb & qc \\ ra & rb & rc \end{pmatrix}$

례 3 $$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot4+5\cdot1 & 1\cdot2+5\cdot5 & 1\cdot(-6)+5\cdot(-3) \\ (-4)\cdot4+2\cdot1 & (-4)\cdot2+2\cdot5 & (-4)\cdot(-6)+2\cdot(-3) \\ 3\cdot4+6\cdot1 & 3\cdot2+6\cdot5 & 3\cdot(-6)+6\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 27 & -21 \\ -14 & 2 & 18 \\ 18 & 36 & -36 \end{pmatrix}$$

행렬의 곱하기에서는 일반적으로 바꿈법칙이 성립하지 않는다.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$일 때

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0 \\ 0\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot1+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot0 \\ 1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

즉 $AB \neq BA$

## 문 제

1. 다음 행렬들의 적을 구하여라.(곱하기가 가능하면)

1) $(2\ \ 3\ \ 4)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}(2\ \ 3\ \ 4)$

3) $(1\ \ 2\ \ {-1})\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\1 & 2 & 1\\3 & 1 & -3\end{pmatrix}$　　　4) $\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\1 & 2 & 1\\3 & 1 & -3\end{pmatrix}(1\ \ 2\ \ {-1})$

5) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 3 & 1\\4 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\\-2 & -1\end{pmatrix}$　　　6) $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\\-2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 3 & 1\\4 & 1 & -1\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\3 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & 3\\3 & -5\end{pmatrix}$　　　8) $\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & 3\\3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\3 & 2 & -2\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}$일 때 다음것을 계산하여라.

1) (A+B)C　　　2) AC+BC　　　3) (AB)C　　　4) A(BC)

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -3 & -6\\0 & 2 & 4\end{pmatrix}$일 때 $A^2$, $A^3$, $A^4$을 계산하여라.

여기서 $A^n$은 A를 $n$번 곱한것이다.

## 5. 1차변환

몇가지 이동의 이동식들을 보자.

**례 1** 직각자리표계가 정해진 평면에서 벡토르 $\vec{a}=\{u,\ v\}$에 의한 평행이동 $f_{\vec{a}}$의 이동식을 구하자.

평면의 임의의 점 $M(x,\ y)$에 대하여

$$f_{\vec{a}}:\ M(x,\ y)\rightarrow M_1(x_1,\ y_1)$$

라고 하면

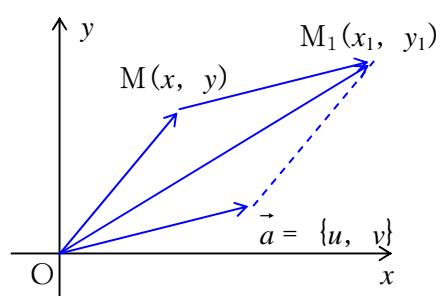



그림 6-1

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \{x, y\}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}_1} = \{x_1, \ y_1\}$$

따라서
$$\begin{cases} x_1 = x + u \\ y_1 = y + v \end{cases}$$

이것은 평행이동 $f_{\vec{a}}$의 이동식이다.

**례 2** 회전중심이 자리표원점 O이고 회전각이 $\theta$인 회전이동 $f_\theta$의 이동식을 구하자.

그림 6-2에서 보는바와 같이

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OM}_1 = r, \ \angle x\mathrm{OM} = \alpha$$

라고 하면

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos(\alpha+\theta) \\ y_1 = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$$

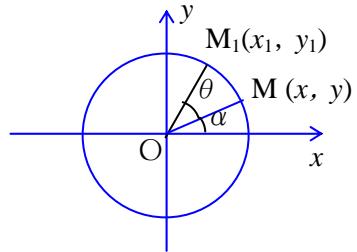



그림 6-2

따라서

$$x_1 = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y_1 = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta = y\cos\theta + x\sin\theta$$

즉
$$\begin{cases} x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

이것이 회전이동 $f_\theta$의 이동식이다.

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{c_2}$가 상수일 때 직각자리표계가 정해진 평면에서 점 M$(\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{y})$을 식

$$\begin{cases} x_1 = a_1x + b_1y + c_1 \\ y_1 = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

에 의하여 결정되는 점 $\mathrm{M}_1(\boldsymbol{x_1}, \ \boldsymbol{y_1})$로 옮기는 변환을 1차변환(또는 선형변환)이라고 부른다.

여기서 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

행렬

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

을 1차변환의 행렬이라고 부른다.

평행이동과 회전이동은 1차변환들이고 행렬은 각각 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

## 문 제

1. 자리표계가 정해진 평면에서 축대칭이동의 변환식과 변환행렬을 구하여라.
2. 자리표계가 정해진 평면에서 중심닮음변환의 변환식과 변환행렬을 구하여라.
3. 자리표계가 정해진 평면에서 점 A(0, 0), B(1, 0), C(−1, 1)들을 각각 점

   $A_1(-1,\ 1)$, $B_1(-3,\ 0)$, $C_1(0,\ -1)$

   들로 옮기는 1차변환의 변환식과 변환행렬을 구하여라.

**알아보기** 평행이동을 거듭한것은 1차변환인가?

**례 3** $x$축에 관한 대칭이동 $f_x$에 회전중심이 자리표원점이고 회전각이 $\frac{\pi}{2}$인 회전이동 $f_{\frac{\pi}{2}}$를 거듭하자. 이것을 $f_{\frac{\pi}{2}} \circ f_x$로 표시하자.

$x$축에 관한 대칭이동 $f_x$의 변환식은

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = -y \end{cases}$$

회전이동 $f_{\frac{\pi}{2}}$의 변환식은 $\begin{cases} x_1 = -y \\ y_1 = x \end{cases}$

따라서 $f_{\frac{\pi}{2}} \circ f_x$에 의하여 점 M($x$, $y$)은 점 M′($y$, $x$) $x$)로 옮겨진다.

즉 $f_{\frac{\pi}{2}} \circ f_x$은 직선 $y=x$에 관한 대칭이동이고 변환행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

즉 변환행렬은 회전이동 $f_{\frac{\pi}{2}}$의 변환행렬과 대칭이동 $f_x$의 변환행렬의 적과 같다.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 문 제

1. $x$축에 관한 축대칭이동에 $y$축에 관한 축대칭이동을 거듭한것은 1차변환인가?
2. 두 중심닮음변환 ( $k_1$, 0), ( $k_2$, 0)을 거듭한것은 1차변환인가?

## 련 습 문 제

1. 다음의 같기식에 맞는 $x$, $y$, $u$, $v$의 값을 구하여라.

1) $\begin{pmatrix} 1 & x+y \\ x-y & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v & 1 \\ 3u & -5 \end{pmatrix}$  2) $\begin{pmatrix} u+v & u-v \\ x+y & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. 행렬

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

에 대하여 다음 계산을 하여라.

1) A+B-C  2) 2A+3B  3) 3B-4C

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$일 때 AB-BA를 계산하여라.

4. 다음의 행렬의 적을 구하여라.

1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$일 때 다음 같기식이 성립하는가?

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

여기서 $A^2$, $B^2$은 각각 AA, BB를 표시한것이다.

6. 직각자리표계가 정해진 평면에서 ∠$xoy$의 2등분선 $\ell$에 관한 축대칭이동 $f_\ell$의 변환식과 변환행렬을 구하여라.

7. 직각자리표계가 정해진 평면의 임의의 점 M에서 $x$축에 그은 수직선의 밑점을 $M_0$이라고 하고 선분 $MM_0$의 가운데점을 $M_1$이라고 하자. 이때 평면의 임의의 점 $M(x, y)$를 $M_1(x_1, y_1)$로 옮기는 1차변환의 변환식과 변환행렬을 구하여라.

8. 1차변환들을 거듭한것은 1차변환이라는것을 증명하여라.

1. 련립 1 차방정식

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p \\ a_2x+b_2y+c_2z=q \\ a_3x+b_3y+c_3z=r \end{cases}$$

은 행렬의 곱하기를 리용하여 다음과 같이 표시할수 있다.

$$AX=B$$

여기서

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

이것은 주어진 련립방정식을 푼다는것은 행렬 X를 구한다는것을 의미한다.
이러한 행렬 X가 존재하자면 행렬 A에 대하여 어떤 조건이 성립해야 하는가?

2. 임의의 두 $n$차행렬 A, B에 대하여 같기식

$$(A+B)^k=\sum_{i=0}^{k} C_k^i A^i B^{k-i}$$

가 성립하자면 어떤 조건이 있어야 하는가?

## 제 2 절. 행 렬 식

### 1. 3차행렬식

9 개의 수 $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$, $a_3$, $b_3$, $c_3$ 들로 만든 표시

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

를 3 차행렬식이라고 부른다.

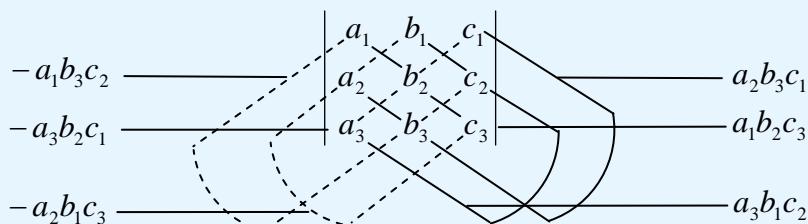
련립1차방정식

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p \\ a_2x + b_2y + c_2z = q \\ a_3x + b_3y + c_3z = r \end{cases}$$

을 쉽게 푸는데서 결수들로 만든 표시

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

가 많이 리용된다.

행렬식의 계산규칙을 그림으로 그려보면 다음과 같다.

례 다음 3차행렬식을 계산하여라.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(풀이) $D = 3\cdot1\cdot1 + 2\cdot3\cdot(-2) + (-2)\cdot0\cdot3 - (-2)\cdot1\cdot(-2) - 2\cdot0\cdot1 - 3\cdot3\cdot3 = -40$

### 문 제

다음 3차행렬식들을 계산하여라.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$  2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$  3) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$  5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}$  6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$

## 2. 행렬식의 성질

행렬식을 간단히 계산할수 있는 방법을 찾기 위하여 행렬식이 어떤 성질을 가지는가를 살펴보자.

행렬식

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

의 매 행이 그 원소들의 순서는 보존하면서 같은 번호를 가지는 렬이 되게 행렬식을 변형하면 다음과 같은 행렬식이 나온다.

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

행렬식을 이와 같이 변형하는것을 행렬식을 전위한다고 말한다.

행렬식을 전위하면 그 값이 어떻게 되겠는가를 보자.

D의 마디 $a_2b_3c_1$는 $D_1$의 마디로도 되는데 D에서도 《+》부호를 가지고 $D_1$에서도 《+》부호를 가진다. 또한 D의 마디 $a_1b_3c_2$은 $D_1$의 마디로도 되는데 D에서도 《−》부호를 가지고 $D_1$에서도 《−》부호를 가진다. 다른 마디들에 대해서도 D와 $D_1$에서 꼭같은 부호들을 가진다는것을 알수 있다.

그러므로

$$D=D_1$$

[성질 1] 행렬식은 전위하여도 그 값이 변하지 않는다.

성질 1)에 의하여 행렬식의 행에 대하여 성립하는 모든 성질들은 렬에 대하여 성립하고 거꾸로 렬에 대하여 성립하는 모든 성질들은 행에 대하여 성립한다.

그러므로 앞으로는 행에 대하여서만 고찰한다.

행렬식 D에서 임의의 두 행을 바꾸어놓은 행렬식을 $D_2$라고 하자.

레컨대

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

라고 하자.

D의 마디 $a_1b_2c_3$은 $D_2$의 마디로도 되지만 D에서는 《+》부호를 가지고 $D_2$에서는 《-》부호를 가진다. 또한 D의 마디 $a_1b_3c_2$은 $D_2$의 마디로도 되지만 D에서는 《-》부호를 가지고 $D_2$에서는 《+》부호를 가진다.

다른 마디들에 대해서도 D와 $D_2$에서 서로 다른 부호들을 가진다는것을 알수 있다.

그러므로 $D_2=-D$

[성질 2] 행렬식에서 두 행을 서로 바꾸면 행렬식의 값은 부호만 변한다.

## 문 제

1. 행렬식에서 한 행(렬)의 모든 원소가 령이면 그 행렬식의 값은 어떻게 되겠는가?
2. 행렬식에서 행(렬)들의 순서를 거꾸로 고치면 그 행렬식의 값은 어떻게 되겠는가?
3. 행렬식에서 두 행(렬)이 같으면 행렬식의 값은 어떻게 되는가?

[성질 3] 행렬식에서 임의의 한 행의 모든 원소들을 $k$배 하면 그 행렬식의 값은 주어진 행렬식값의 $k$배로 된다.

레컨대 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{vmatrix} = k\,a_1b_2 - k\,a_2b_1 = k(a_1b_2 - a_2b_1) = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

성질 3은 행렬식에서 임의의 행의 모든 원소들의 공통인수를 행렬식기호밖으로 내보낼수 있다는것을 보여준다.

**례 1** 다음 행렬식을 계산하여라.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & -2 & 14 \end{vmatrix}$$

(풀이) $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 7 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}=2\cdot 0=0$

[성질 4] 두 행렬식에서 같은 번호의 한 행만 다르고 다른 행들은 모두 같으면 그 합은 하나의 행렬식으로 쓸수 있다.

례. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2' & b_2+b_2' & c_2+c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

례컨대

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=(a_1b_2-a_2b_1)+(a_1c_2-a_2c_1)=a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1)$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 \end{vmatrix}$$

## 문 제

1. 행렬식에서 모든 원소의 부호를 반대로 바꾸면 행렬식의 값은 어떻게 되겠는가?
2. 행렬식에서 두 행(렬)이 비례하면 그 행렬식의 값은 어떻게 되겠는가?

[성질 5] 행렬식에서 임의의 한 행의 모든 원소에 임의의 수 $k$를 곱하여 다른 행의 대응하는 원소들에 각각 더하여도 행렬식의 값은 변하지 않는다.

이 성질은 성질 3, 4들로부터 나온다.

례 2 다음 행렬식을 계산하여라.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(풀이) 첫 행에 나머지 모든 행들을 더하면 성질 5에 의하여

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

마지막행렬식의 첫 행에 -1을 곱하여 나머지행들에 각각 더해주면 행렬식의 성질 5에 의하여

$$D = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2$$

례 3 다음 행렬식을 계산하여라.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \frac{a_1 + a_2}{2} & \frac{b_1 + b_2}{2} & \frac{c_1 + c_2}{2} \end{vmatrix}$$

(풀이) 성질 3, 5에 의하여

$$D = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

### 문 제

1. 행렬식들을 행렬식의 성질을 리용하여 계산하여라.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

2. 성질 5를 증명하여라.

### 련 습 문 제

1. 다음 행렬식들을 계산하여라.

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 9 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

2. 다음 행렬식들을 행렬식의 성질을 리용하여 계산하여라.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -x & x & 0 \\ -x & 0 & x \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a & abc & a^2 \\ b & abc & b^2 \\ c & abc & c^2 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2-b_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix}$

3. $x$를 구하여라.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 9 & 16 \\ x & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. 다음 같기식들을 증명하여라.

1) $$\begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)}{(a+x)(b+x)(a+y)(b+y)(c+x)(c+y)}$$

## 제 3 절. 련립 1 차방정식

련립세변수1차방정식

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p & ① \\ a_2x+b_2y+c_2z=q & ② \\ a_3x+b_3y+c_3z=r & ③ \end{cases}$$

을 련립두변수1차방정식과 같이 행렬식에 의하여 푸는 방법을 보자.

행렬식

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

을 련립1차방정식의 **결수행렬식**이라고 부른다.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

따라서

$$A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_2=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad A_3=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

로 놓으면

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

**례 1** 다음 3차행렬식을 계산하여라.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(풀이) $D=3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+(-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$=3\cdot(-8)+2\cdot(-6)+(-2)\cdot 2=-40$

**알아보기** 련립1차방정식을 풀 때 보통 변수를 하나씩 차례로 없애지만 변수 2개를 동시에 없앨수 있는가?

①×$A_1$+②×$A_2$+③×$A_3$

$$(a_1x+b_1y+c_1z)\mathrm{A}_1+(a_2x+b_2y+c_2z)\mathrm{A}_2+(a_3x+b_3y+c_3z)\mathrm{A}_3=p\mathrm{A}_1+q\mathrm{A}_2+r\mathrm{A}_3$$

이것을 다시 정리하면

$$(a_1\mathrm{A}_1+a_2\mathrm{A}_2+a_3\mathrm{A}_3)x+(b_1\mathrm{A}_1+b_2\mathrm{A}_2+b_3\mathrm{A}_3)y+(c_1\mathrm{A}_1+c_2\mathrm{A}_2+c_3\mathrm{A}_3)z$$
$$=p\mathrm{A}_1+q\mathrm{A}_2+r\mathrm{A}_3$$

이때

$$a_1\mathrm{A}_1+a_2\mathrm{A}_2+a_3\mathrm{A}_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$b_1\mathrm{A}_1+b_2\mathrm{A}_2+b_3\mathrm{A}_3=\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

$$c_1\mathrm{A}_1+c_2\mathrm{A}_2+c_3\mathrm{A}_3=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

$$p\mathrm{A}_1+q\mathrm{A}_2+r\mathrm{A}_3=\begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

따라서 결수행렬식이 령 아닐 때 변수 $x$의 값은 다음과 같이 표시된다.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

류사한 방법으로 $y$, $z$를 구하면 그 값을 각각 다음과 같이 표시할수 있다.

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & p & c_1 \\ a_2 & q & c_2 \\ a_3 & r & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\qquad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p \\ a_2 & b_2 & q \\ a_3 & b_3 & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

련립 1 차방정식

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p \\ a_2x+b_2y+c_2z=q \\ a_3x+b_3y+c_3z=r \end{cases}$$

은 곁수행렬식이 령 아닐 때 하나의 풀이를 가지며 그 풀이는 다음과 같다.

***x*** 의 곁수렬 대신 상수렬 　 ***y*** 의 곁수렬 대신 상수렬 　 ***z*** 의 곁수렬 대신 상수렬

$$x=\frac{\begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & p & c_1 \\ a_2 & q & c_2 \\ a_3 & r & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p \\ a_2 & b_2 & q \\ a_3 & b_3 & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

이 풀이공식을 크라메르공식이라고 부른다.

**례 2** 다음 련립방정식을 행렬식을 리용하여 풀어라.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+2y+2z=15 \end{cases}$$

(풀이)

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}=9 \ , \qquad \mathrm{D}_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 15 & 2 & 2 \end{vmatrix}=9$$

$$\mathrm{D}_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 15 & 2 \end{vmatrix}=18 \ , \qquad \mathrm{D}_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & 15 \end{vmatrix}=27$$

$$x=\frac{\mathrm{D}_x}{\mathrm{D}}=1 \, , \quad y=\frac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}}=2 \, , \quad z=\frac{\mathrm{D}_z}{\mathrm{D}}=3$$

풀이모임 $\{(1,\ 2,\ 3)\}$

례 3 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=m \\ x-y+z=3 \end{cases}$$

(풀이)

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-(m+1)(m-1)\ ,\quad D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4(m+1)(m-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-(m-3)(m-1)\ ,\quad D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4(m-1)$$

따라서 $m\neq\pm1$일 때

$$x=4,\quad y=\frac{m-3}{m+1},\quad z=-\frac{4}{m+1}$$

풀이모임 $\left\{(4\ ,\ \frac{m-3}{m+1}\ ,\ -\frac{4}{m+1})\right\}$

## 문 제

다음 련립방정식들을 크라메르공식을 리용하여 풀어라.

1) $\begin{cases} 2x+6y+3z=1 \\ 3x+15y+z=2 \\ 4x-9y+4z=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+3y-5z=0 \\ 3x-4y-6z=-7 \\ 8x-7y+2z=3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+7y-z=8 \\ 4x+2y+3z=9 \\ 3x-5y+3z=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y-2z=-7 \\ 5x+2y+2z=17 \end{cases}$

## 련 습 문 제

1. 다음 련립방정식을 크라메르공식에 의하여 풀어라.

1) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 5x+y-2z=10 \\ 3x+4y+z=-2 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 2x+7y-z=8 \\ 4x+2y+3z=9 \\ 3x-5y+3z=1 \end{cases}$　　3) $\begin{cases} x+5y-2z=7 \\ x-4y+z=-5 \\ 7x-3y-z=0 \end{cases}$

2. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} (1+a)x+y+z=1 \\ x+(1+a)y+z=a \\ x+y+(1+a)z=a^2 \end{cases}$

### 탐 구

1. 련립1차방정식

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

은 항상 풀이 $x=0$, $y=0$, $z=0$을 가진다. 이러한 풀이를 령풀이라고 부른다.

1) 어떤 경우에 이 련립방정식이 령풀이 하나만을 가지는가?

2) 어떤 경우에 이 련립방정식은 령 아닌 풀이를 가지는가?

2. 련립1차방정식

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p \\ a_2x+b_2y+c_2z=q \\ a_3x+b_3y+c_3z=r \end{cases}$$

1) 어떤 경우에 무수히 많은 풀이를 가지는가?

2) 어떤 경우에 풀이를 가지지 않는가?

## 복 습 문 제

1. $A=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$일 때 $A^{1\,983}$을 계산하여라.

2. $A=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$일 때 $A^{100}$을 계산하여라.

3. 행렬 A, B에 대하여 AB=O이면 A=O 또는 B=O이라고 말할수 있는가?

4. 행렬 A, B, C들에 대하여 갈기식 AB=AC가 성립하면 갈기식 B=C가 성립하는가?

5. $n$차행렬 A와 B에 대하여 다음 갈기식들이 성립하는가?

1) $(A\pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

2) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

6. 다음 행렬식들의 값을 행렬식의 성질을 리용하여 계산하여라.

1) $\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 \\ a_1 & x & a_3 \\ a_1 & a_2 & x \end{vmatrix}$　　2) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & x+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & x+a_3 \end{vmatrix}$　　3) $\begin{vmatrix} -x & a & b \\ b & -x & a \\ a & b & -x \end{vmatrix}$

7. 다음 행렬식의 값을 계산하여라.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$　　2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$　　3) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} -4 & 7 & 4 \\ 4 & -9 & -3 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix}$　　5) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

8. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 4x-3y+2z=1 \\ x+2y-z=3 \\ x-3y+2z=-2 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 3x-3y-2z=0 \\ 2x-3y-z=3 \end{cases}$　　3) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y+3z=0 \end{cases}$

9. 101개의 모르는 변수를 가지는 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{101} = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{100} + x_{101} = 1 \end{cases}$$

10. 련립세변수1차방정식으로 풀리는 응용문제를 만들고 풀어라.

3차행렬식은 3차행렬에 수를 대응시키는 넘기기로 볼수 있다.

그러나 3차행렬에 수를 대응시키는 넘기기는 무수히 많으며 이러한 넘기기들이 모두 3차행렬식으로 되는것은 아니다.

례컨대 3차행렬

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

에 수 $a_{11}$을 대응시키는 넘기기는 3차행렬식이 아니다. 왜냐하면 행렬식의 성질 2가 성립하지 않기때문이다.

3차행렬에 수를 대응시키는 넘기기들가운데서 어떤 넘기기가 3차행렬식으로 되겠는가?

상 식

우리 나라 수학자 리상혁의 론문집 《산술관견》

우리 나라 수학자 리상혁(1810년-?)은 남병길과 수학을 공동으로 연구하였다.

그는 1855년에 4개의 론문으로 되여있는 론문집 《산술관견》을 출판하였다.

이 론문집은 기하, 대수, 무한수렬의 합 등에 관한 내용으로서 당시 동양에서 최고수준의것이였다. 그렇기때문에 당시 수학자들은 이 론문집에 실린 론문들이 가지는 심오한 내용과 정확한 론리에 대해서는 다른 선진국 수학자들까지도 탄복할것이라고 말하였다고 한다.

# 제 7 장. 모임과 론리

∪, ∩, ∨, ∧

0, 1

모임산법법칙

명제와 그 산법

명제의 산법법칙

## 제 1 절. 모임산법법칙

$a$ 가 모임 A의 원소라는것을 $a \in \mathrm{A}$ 로, $a$ 가 모임 A의 원소가 아니라는것을 $a \notin \mathrm{A}$ 로 표시하였다.

모임 A가 모임 B의 부분모임이라는것을 $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ 로 표시한다.

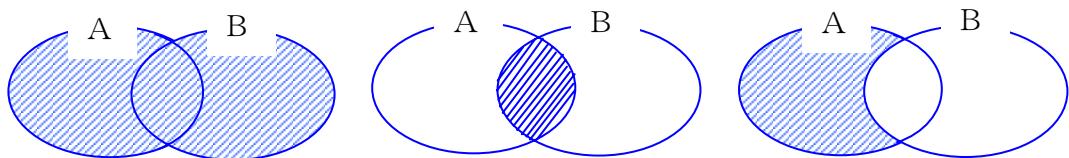
빈모임을 $\phi$ 로 표시하고 $\phi \subset \mathrm{A}$ 로 본다. 또한 $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$ 로도 본다. $\phi$, A가 아닌 A의 부분모임을 **참부분모임**이라고 부른다.

**례 1** 자연수모임 N, 옹근수모임 Z, 유리수모임 Q, 실수모임 R, 복소수모임 C에서

$$2 \in \mathrm{N},\quad -2 \in \mathrm{Z},\quad \frac{3}{2} \in \mathrm{Q},\quad \sqrt{2} \in \mathrm{R},\quad 2+3i \notin \mathrm{R} \text{ 이다.}$$

$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}, \mathrm{A} \supset \mathrm{B}$일 때 A와 B는 **같은 모임**이라고 부르고 $\mathrm{A} = \mathrm{B}$로 표시한다.

**례 2** $(x-a)(x-b)=0$ 의 풀이모임 A, $x^2-(a+b)x+ab=0$의 풀이모임을 B라고 하면 A=B

두 모임 A, B의 합 $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, 적 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, 차 $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$는 다음과 같다.

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A}$ 또는 $x \in \mathrm{B}\}$

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A}$ 이고 $x \in \mathrm{B}\}$

$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A}$ 이고 $x \notin \mathrm{B}\}$

그림 7-1

모임 U를 하나 정해놓고 그 부분모임을 생각할 때 처음에 정한 모임 U를 **전체모임**이라고 부른다.

앞으로 모임 A, B, C,⋯ 라고 하면 이것들은 전체모임 U의 부분모임으로 보겠다.

$\mathrm{U} \setminus \mathrm{A}$ 를 A의 **나머지모임**이라고 부르고 $\overline{\mathrm{A}}$ 로 표시한다.

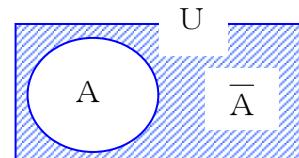



그림 7-2

**례 3** 3개 원소로 된 모임 $\mathrm{U} = \{a,\ b,\ c\}$ 의 부분모임은

$$\phi,\ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

이다. 이때 부분모임을 원소로 가지는 모임의 원소들의 개수는

$$c_3^0 + c_3^1 + c_3^2 + c_3^3 = 8$$

이다. 이것은

$$(1+1)^3 = c_3^0 + c_3^1 + c_3^2 + c_3^3 = 2^3 = 8$$

로 계산할수 있다.

탐 구

N개의 원소로 된 모임에서 부분모임을 모두 만들어 그것들을 원소로 가지는 모임을 만들 때 이 모임의 원소수를 구하는 공식을 찾아라.

해보기 3각형모임을 전체모임 U로 보고 뾰족3각형모임, 직3각형모임, 무딘3각형모임을 A, B, C로 표시하였을 때 A, B, C, U사이의 관계를 모임산법기호로 표시해보아라.

모임 또는 그것들을 모임산법기호로 이어놓은것을 **모임식**, 모임식들을 같기기호로 이어놓은것을 **모임같기식**이라고 부른다.

실례로 $A, A\cap(A\cup B)$ 등은 모임식이고 $A=A\cap(A\cup B)$는 모임같기식이다.

$$A\subset B,\ \ A\supset B \Leftrightarrow A=B$$

이므로 모임같기식 $A=B$를 증명하려면 $A\subset B, A\supset B$를 증명하면 된다.

례 4 모임같기식 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$를 증명하여라.

(증명) 먼저

$$(A\cup B)\cup C\subset A\cup(B\cup C) \qquad (1)$$

를 증명하자.

$$x\in(A\cup B)\cup C\Rightarrow x\in A\cup B \text{ 또는 } x\in C$$

그런데 $x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$ 또는 $x\in B$

따라서

$x\in(A\cup B)\cup C\Rightarrow(x\in A$ 또는 $x\in B)$ 또는 $x\in C\Rightarrow x\in A$ 또는 $(x\in B$ 또는 $x\in C)\Rightarrow x\in A$ 또는 $x\in B\cup C\Rightarrow x\in A\cup(B\cup C)$

따라서 (1)이 성립한다.

꼭 마찬가지로 하여

$$(A\cup B)\cup C\supset A\cup(B\cup C) \qquad (2)$$

를 증명할수 있다. 따라서 (1), (2)에 의하여

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

례 5 모임같기식 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$를 증명하여라.

(증명) 먼저

$$(A\cap B)\cap C\subset A\cap(B\cap C) \qquad (3)$$

를 증명하자.

$x\in(A\cap B)\cap C\Rightarrow x\in A\cap B$이고 $x\in C\Rightarrow(x\in A$이고 $x\in B)$이고 $x\in C\Rightarrow x\in A$이고 $(x\in B$이고 $x\in C)\Rightarrow x\in A\cap(B\cap C)$

따라서 (3)이 성립한다.

꼭 마찬가지로 하여

$$(A\cap B)\cap C\supset A\cap(B\cap C) \qquad (4)$$

따라서 (3), (4)에 의하여

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

**정리 1. 모임 A, B, C에 대하여**

1) $A\cup B=B\cup A$ , $A\cap B=B\cap A$ (바꿈법칙)

2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (묶음법칙)

3) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (분배법칙)

(증명) 1)은 $\cup$와 $\cap$의 의미에 의하여 분명하다.

2)는 례 4, 5에서 증명하였다.

3) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$을 증명하자.

$x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ 또는 $x\in(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ 또는 $x\in B$이고

$x\in C\Rightarrow(x\in A$ 또는 $x\in B)$이고

$$(x\in A \text{ 또는 } x\in C)\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C) \qquad (5)$$

가 성립한다. 꼭 마찬가지로 하여

$$A\cup(B\cap C)\supset(A\cup B)\cap(A\cup C) \quad (6)$$

을 증명할수 있다.

따라서 (5), (6)에 의하여

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

다음 비슷한 방법으로 하여

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

를 증명할수 있다.

**알아보기** 모임그림을 그려 $\overline{A\cap B}$와 $\overline{A}\cup\overline{B}$가 같은가를 알아보아라.

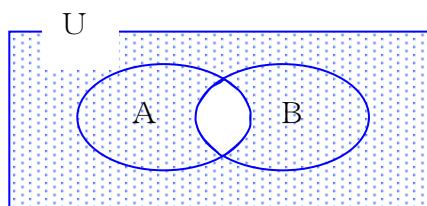



그림 7-3

정리 2. 모임 A, B에 대하여

1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (쌍대법칙)

(증명) 1)을 증명하자.

$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$

이거나 $x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ 또는

$x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

따라서 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2)도 같은 방법으로 증명할수 있다.

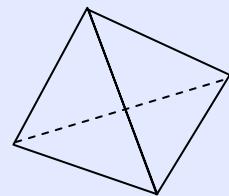
바른4면체에서 정점들의 모임, 모서리들의 모임, 면들의 모임 또는 그 원소수를 각각 A, L, P로 표시하자.

1) A, L, P의 원소수를 조합기호 $C_m^n$를 써서 표시하여 보아라.

실례로 면은 세 점에 의하여 하나로 정해질수 있으므로 면의 수는 정점의 수 4에서 3개씩 취한 조합 $C_4^3$이라는것을 알수 있다.

2) A-L+P를

$$(1-1)^4 = C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4 = 0$$

을 써서 계산해보아라. (A-L+P를 오일레르특성수라고 불렀다.)

(주의) 이 방법은 앞으로 $n$차원공간에서의 기하라고 부르는 높은 수학을 연구할 때 그대로 넓혀져간다.

문 제

1. 모임갈기식 $(A \cup \overline{B}) \cap \overline{A} \cup \overline{B} \neq \phi$를 증명하여라.

2. 모임갈기식 $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$를 증명하여라.

## 련 습 문 제

1. 분배법칙 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$를 증명하여라.
2. 다음 모임갈기식이 성립하는가?
   1) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(A\cup C)$
   2) $(A\cup B)\cap(A\cup B)=A\cup B$
3. 다음것을 증명하여라.
   1) $A\subset B \Rightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$   2) $A\subset B \Rightarrow A\cap C\subset B\cap C$
4. 모임 $U=\{x\mid x$는 20보다 크지 않은 씨수$\}$가 주어졌다. A, B가 U의 부분모임이고 $A\cap\overline{B}=\{3, 5\}$, $\overline{A}\cap B=\{7, 19\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{2, 17\}$이다. A, B를 구하여라.

## 제 2 절. 명제와 그 산법

### 1. 명제

옳다든가 옳지 않다든가를 찍어서 말할수 있는 글 또는 식을 **명제**라고 부른다. 그러므로 명제에는 옳은 명제도 있고 옳지 않은 명제도 있다.

**례 1** 1) $2+3=5$ 옳은 명제
2) $90° < 45°$ 옳지 않은 명제

명제 $a$에 대하여 $a$가 옳으면 1을 대응시키고 $a$가 옳지 않으면 0을 대응시킨다. 이때 명제에 대응하는 1, 0을 그 명제의 값이라고 부르고 $[a]$로 표시한다.

**례 2** 1) $a$: 2등변3각형의 두 밑각은 같다. $[a]=1$
2) $b$: 직3각형에서 빗변이 제일 작다. $[b]=0$
3) $c$: 3각형의 아낙각의 합은 $2\pi$이다. $[c]=0$

### 문 제

다음것에서 명제를 찾고 옳은 명제와 옳지 않은 명제들을 갈라내여라.
1) 직3각형에는 무딘각이 없다.
2) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \ \cos\alpha$
3) 2차방정식은 2개의 풀이를 가진다.

## 2. 명제산법

명제들에 《…아니다.》, 《…이고…이다.》, 《…또는 …》, 《…이면…이다.》 등의 말을 이어서 새로운 명제를 만드는것을 명제의 **합성**이라고 부른다.

이때 새로 만들어진 명제를 **합성명제**라고 부른다.

### 부정명제

명제 $a$ 에 대하여 《 $a$ 가 아니다.》라는 새로운 명제를 만들었을 때 이것을 명제 $a$ 의 부정명제라고 부르고 $\bar{a}$ 로 표시한다.

례 1 $a$ : 3각형의 아낙각의 합은 2직각이 아니다. (옳지 않은 명제)

$\bar{a}$ : 3각형의 아낙각의 합은 2직각이다. (옳은 명제)

부정명제 $\bar{a}$ 의 명제값은 다음과 같다.

| $a$ | $\bar{a}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

이와 같이 명제값을 표로 표시한것을 **명제값표**라고 부른다.

### 합명제

두 명제 $a, b$ 에 대하여 $a, b$ 가운데 하나라도 옳으면 옳다고 보는 새로운 명제 《 $a$ 또는 $b$ 이다.》를 명제 $a$ 와 $b$ 의 합명제라고 부르고 $a \vee b$ 로 표시한다.

$a \vee b$ 는 $a, b$ 가 함께 옳지 않으면 옳지 않다.
그리하여 $a \vee b$ 의 명제값표를 쓰면 다음과 같다

| $a$ | $b$ | $a \vee b$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

례 2 $a$ :《평행직선에서 엇각은 같다.》 (옳은 명제)
$b$ :《평행직선에서 같은자리각은 다르다.》 (옳지 않은 명제)
$a \vee b$ :《평행직선에서 엇각은 같거나 또는 같은자리각은 다르다.》(옳은 명제)

### 적명제

두 명제 $a$, $b$ 가운데 하나라도 옳지 않은것이 있다면 옳지 않다고 보는 새로운 명제 《 $a$ 이고 $b$ 이다.》를 명제 $a$ 와 $b$ 의 적명제라고 부르고 $a \wedge b$ 로 표시한다. (때로는 $a \cdot b$ 로 표시한다.)

$a \wedge b$ 는 $a$, $b$ 가운데 하나라도 옳지 않은것이 있다면 옳지 않다.
그리하여 $a \wedge b$ 의 명제값표를 쓰면 다음과 같다.

| $a$ | $b$ | $a \wedge b$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

례 3 그림 7-4에서 직선 $p$, $q$ 는 어기는 직선이다.
$a$ :《직선 $p$, $q$ 는 평행이 아니다.》 (옳은 명제)
$b$ :《직선 $p$, $q$ 는 사귀지 않는다.》 (옳은 명제)
$a \wedge b$ :《직선 $p$, $q$ 는 평행도 아니고 사귀지도 않는다.》(옳은 명제)

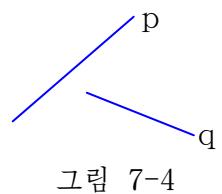



그림 7-4

### 따름명제

두 명제 $a$, $b$ 에 대하여 $a$ 가 옳고 $b$ 가 옳지 않을 때만 옳지 않고 다른 때는 옳다고 보는 새로운 명제 《 $a$ 이면 $b$ 이다.》를 명제 $a$, $b$ 의 따름명제라고 부르고 $a \rightarrow b$ 로 표시한다.

그리하여 $a \rightarrow b$ 의 명제값표를 쓰면 다음과 같다.

| $a$ | $b$ | $a \rightarrow b$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

례 4 $a$ : 《3각형에서 두 변은 같다.》
$b$ : 《3각형에서 두 각은 같다.》
$a \to b$ :《3각형에서 두 변이 같으면 두 각은 같다.》

따름명제 $a \to b$ 에서 명제 $a$ 가 성립하는 대상들의 모임을 A, 명제 $b$가 성립하는 대상들의 모임을 B로 표시할 때 A와 B가 어떤 전체모임 U의 부분모임인 경우를 보자.

례 5 $a$ :《옹근수는 6의 배수이다.》
$b$ :《옹근수는 합성수이다.》
이때 따름명제
$a \to b$ :《옹근수가 6의 배수이면 그 수는 합성수이다.》는 옳다.

명제 $a$가 성립하는 대상들의 모임을 A, 명제 $b$가 성립하는 대상들의 모임을 B라고 할 때 A와 B는 모두 전체모임 U의 부분모임이라고 하자.
이때 명제 $a \to b$ 가 옳으면 $A \subset B$ 이고 그 거꿀도 성립한다.
이때 따름명제 $a \to b$ 를 $a \Rightarrow b$ 로 쓰기로 한다.

### 동등명제

두 명제 $a$, $b$ 에 대하여 《 $a$ 이면 $b$ 이고 $b$ 이면 $a$ 이다. 》라는 명제를 동등명제라고 부르고 $a \leftrightarrow b$ 로 표시한다.

동등명제 $a \leftrightarrow b$ 의 명제값표를 만들면 다음과 같다.

| $a$ | $b$ | $a \to b$ | $b \to a$ | $a \leftrightarrow b$<br>$(a \to b) \wedge (b \to a)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

례 6 2등변3각형 ABC에서 (그림 7-5)
$a$ :《$\triangle$ABC에서 AB=AC이다.》
$b$:《$\triangle$ABC에서 $\angle B = \angle C$ 이다.》
$a \to b$ :《$\triangle$ABC에서 AB=AC$\to \angle B = \angle C$ 》(옳은 명제)
$b \to a$ :《$\triangle$ABC에서 $\angle B = \angle C \to AB = AC$ 》(옳은 명제)
$a \leftrightarrow b$ :《$\triangle$ABC에서 $AB = AC \leftrightarrow \angle B = \angle C$ 》
(즉 $\triangle$ABC에서 AB=AC와 $\angle B = \angle C$ 는 동등하다.)

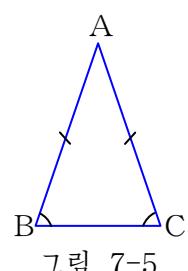



그림 7-5

명제의 합성을 **명제산법**이라고 부르고 우에서 본 명제의 산법기호 $-, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$를 **론리기호**라고 부른다.

명제들에 론리기호를 여러가지 결합하여 보다 복잡한 합성명제를 만들수 있다.

따름명제 $a \rightarrow b$에서 조건 $a$가 성립하는 대상들의 모임을 A, 결론 $b$가 성립하는 대상들의 모임을 B로 표시할 때 A, B가 어떤 모임 U의 부분모임인 경우를 보자.

명제 $a \Rightarrow b$에서 $b$는 $a$이기만 하면 충분하다. 그리하여 **$a$를 $b$이기 위한 충분조건**이라고 부른다.

다음으로 $a \Rightarrow b$에서 $a$이기 위하여 필요한 조건은 $b$외에도 더 있을수 있다.

실례로 $a$: 직2등변3각형

$b$: 두 변이 같은 3각형

$c$: 직3각형(같은 두 변이 만드는 각이 직각)

으로 놓으면 $a$이기 위하여서는 $b$도 필요하고 $c$도 필요하다.

어쨌든 $a \Rightarrow b$에서 $a$이기 위하여서는 반드시 $b$가 필요하다.

그리하여 **$b$를 $a$이기 위한 필요조건**이라고 부른다.

그러면 $a \Leftrightarrow b$에서 $a$는 $b$이기 위한 필요조건도 되고 충분조건도 된다.

따라서 $a \Leftrightarrow b$를 《$a$이기 위해서는 $b$일것이 필요하고 충분하다.》고도 말한다.

**례 7** 1) 두 직선이 평행이 되기 위하여서는 같은자리각이 같을것이 필요하고 충분하다.

2) 4각형이 평행4변형이 되기 위하여서는 한쌍의 맞은변이 평행이고 같을것이 필요하고 충분하다.

### 문 제

1. 4각형이 원에 내접하기 위한 필요하고 충분한 조건을 말하여라.
2. 4각형이 원에 외접하기 위한 필요하고 충분한 조건을 말하여라.
3. $a \leftrightarrow b$가 옳은 명제이면 A=B이겠는가?
4. $a \rightarrow b$가 옳지 않은 명제일 때 $A \subset B$가 아니라는 실례를 들어보아라.

## 련 습 문 제

1. 명제 $a$: $2 < 3$

$b$: 3각형의 세 아낙각의 합은 $\pi$이다.

에 대하여 $\bar{a}$, $\bar{b}$를 만들고 $a$, $\bar{a}$, $b$, $\bar{b}$의 명제값을 말하여라.

2. 다음 명제들의 명제값을 말하여라.

1) 3각형의 아낙각의 합은 $2\angle R$ 또는 $3\angle R$이다.

2) $a:3<2,\quad b:(-3)\cdot(-2)=6$일 때 $a\vee b,\ a\vee\bar{b},\ \bar{a}\vee b,\ \bar{a}\vee\bar{b}$

3) $a:3+5=7,\ b:2+6=8$일 때 $a\vee b,\ \bar{a}\vee b,\ a\vee\bar{b},\ \bar{a}\vee\bar{b}$

3. 다음 명제들의 명제값을 말하여라.

1) 3각형의 아낙각의 합은 $3\angle R$이고 4각형의 아낙각의 합은 $2\angle R$이다.

2) $a:1<2,\ b:3<4$라고 할 때 $a\wedge b,\ \bar{a}\wedge b,\ a\wedge\bar{b},\ \bar{a}\wedge\bar{b}$

4. 다음것을 말하여라.

1) 네 점이 한 원둘레, 한 구면에 놓이기 위한 충분조건

2) 3각형의 한 각이 직각이기 위한 충분조건

3) 두 직선이 평행이기 위한 필요충분조건

5. 다음의 명제에서 _____에 맞는것을 써넣어라.

1) $x=y=0$은 $xy=0$이기 위한 _____이다.

2) $a^3>0$은 $a>0$이기 위한 _____이다.

3) $a<0,\ b<0$은 $a+b<0$이기 위한 _____이다.

(1) 필요조건　　(2) 충분조건　　(3) 필요충분조건

## 제 3 절. 명제의 산법법칙

두 합성명제가 꼭같은 명제값표를 가질 때 두 합성명제는 **같다**고 말하고 기호 《=》를 써서 표시한다.

**정리 1.** 명제 $a$, $b$, $c$에 대하여

1) $a\vee b=b\vee a$

$a\wedge b=b\wedge a$

$(a\leftrightarrow b)=(b\leftrightarrow a)$　　(바꿈법칙)

2) $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$　　(묶음법칙)

3) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$　　(분배법칙)

(증명) 바꿈법칙 1)과 묶음법칙 2)가 성립하는것은 분명하다. 분배법칙 3)의 첫째 식을 증명하자. 그러기 위하여 아래의 표와 같은 명제값표를 만들자.

| $a$ $b$ $c$ | $b\wedge c$ | $a\vee b$ | $a\vee c$ | $a\vee(b\wedge c)$ | $(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 0 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 0 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

표에서 보는것처럼 $a\vee(b\wedge c)$와 $(a\vee b)\wedge(a\vee c)$는 같은 명제값표를 가진다.

그러므로 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

분배법칙 3)의 둘째 식도 우에서와 같은 방법으로 증명할수 있다.

**알아보기** $\overline{a\wedge b}$와 $\overline{a}\vee\overline{b}$의 명제값표를 만들고 같은가를 알아보아라.

| $a$ $b$ | $\overline{a}$ $\overline{b}$ | $a\wedge b$ | $\overline{a\wedge b}$ | $\overline{a}\vee\overline{b}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 1 | 0 0 | 1 | | |
| 1 0 | 0 1 | 0 | | |
| 0 1 | 1 0 | 0 | | |
| 0 0 | 1 1 | 0 | | |

**정리 2.** 명제 $a$, $b$에 대하여

1) $\overline{a\wedge b}=\overline{a}\vee\overline{b}$

2) $\overline{a\vee b}=\overline{a}\wedge\overline{b}$

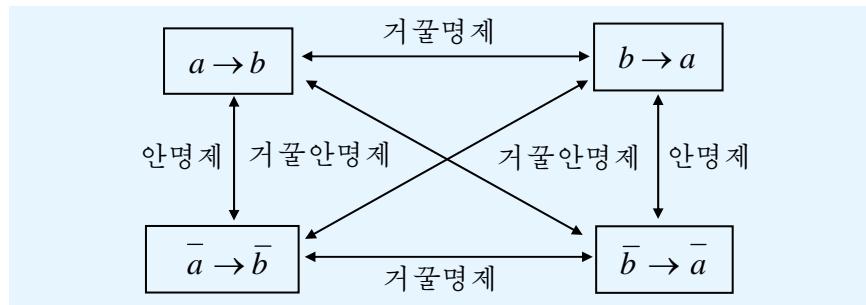
(쌍대법칙)

앞으로 론리산법에서 묶음표가 있지 않을 때에는 계산을 $-$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ 순서로 하기로 하겠다.

명제 $a \to b$ 에 대하여 명제 $b \to a$ 를 거꿀명제,

명제 $a \to b$ 에 대하여 명제 $\bar{a} \to \bar{b}$ 를 안명제(또는 부명제),

명제 $a \to b$ 에 대하여 명제 $\bar{b} \to \bar{a}$ 를 거꿀안명제라고 부른다.

이것을 하나의 표로 묶으면 다음과 같다.

**정리 3.** 명제 $a \to b$ 와 그의 거꿀안명제 $\bar{b} \to \bar{a}$ 는 같은 명제이다.

(증명) 명제값표를 만들면

| $a$ | $b$ | $\bar{a}$ | $\bar{b}$ | $a \to b$ | $\bar{b} \to \bar{a}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

그러므로 $(a \to b) = (\bar{b} \to \bar{a})$

우의 정리에 의하여 $a \to b$ 를 증명할 대신에 $\bar{b} \to \bar{a}$ 를 증명하여도 된다. 이것도 귀유법에 속한다는것을 알수 있다.

**례** $(a \to b) \neq (b \to a)$, $(a \to b) \neq (\bar{a} \to \bar{b})$ 를 증명하여라.

(증명) 명제값표를 만들면

| $a$ | $b$ | $\bar{a}$ | $\bar{b}$ | $a \to b$ | $b \to a$ | $\bar{a} \to \bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

따라서

$$(a \to b) \neq (b \to a)$$
$$(a \to b) \neq (\bar{a} \to \bar{b})$$

이리하여 어떤 명제가 옳다고 하여 그것의 거꿀명제, 안명제가 반드시 옳다는것은 아니라는것을 알수 있다.

## 문 제

1. 다음 식을 증명하여라.

1) $a \vee (a \wedge b) = a$　　2) $a \wedge (a \vee b) = a$　　3) $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

2. 다음 식이 성립하겠는가?

1) $\overline{a \wedge (\bar{b} \vee \bar{a})} \wedge c = \bar{a} \vee (b \wedge a) \vee \bar{c}$　　2) $a \to (b \to c) = a \wedge b \to c$

3) $(\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge c = \overline{a \wedge b \vee \bar{c}}$

### 탐 구

《조건 A를 만족하는 점의 자리길은 B이다.》를 증명할 때

1) 조건 A를 만족시키는 점은 B우에 놓인다.

2) B우에 놓이는 점은 조건 A를 만족시킨다.

를 따졌다.

1. 명제들사이의 관계를 써서 1), 2)를 여러가지로 바꾸어보아라.

2. 매개의 1), 2)를 《두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점의 자리길은 선분 AB의 수직2등분선이다.》를 증명하는데 적용해보아라.

### 련 습 문 제

1. $a : 3 < 5$, $b : 2 > 3$이라고 할 때 다음 명제들의 명제값을 구하여라.

1) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $a \vee b$, $\bar{a} \vee b$　　2) $a \wedge b$, $\bar{a} \wedge b$, $a \wedge \bar{b}$

2. 다음 같기식이 성립하겠는가?

1) $\bar{a} \vee (a \wedge b) = \bar{a} \vee b$      2) $a \wedge (\bar{a} \vee b) = (a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) \wedge b$

3. 명제 《∠B가 무딘각이면 △ABC는 무딘3각형이다.》와 그의 거꿀명제, 안명제, 거꿀안명제에서 옳은 명제로 되는것을 찾아라.

## 복 습 문 제

1. 다음 모임같기식을 증명하여라.

1) $(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}$

2) $A \cap (A \cup \overline{A}) = A$

2. $a: 3-2=0$, $b: 3+2=5$일 때 다음 명제의 명제값을 말하여라.

$$a \wedge \bar{b},\ \bar{b} \vee a,\ (a \vee b) \wedge \bar{b},\ (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$$

3. 다음 명제같기식을 증명하여라.

1) $\bar{b} = \bar{b} \wedge (a \vee \bar{b})$      2) $\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = b \wedge (a \vee \bar{b})$

3) $\overline{a \wedge (a \vee \bar{b})} = (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$

4. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) = b$

2) $(a \vee b \vee c) \wedge (a \wedge b \wedge c \vee d) = a \wedge b \wedge c \vee (a \vee b \vee c) \wedge d$

3) $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee c) = (a \wedge c) \vee (\bar{a} \vee c) \wedge b$

5. 다음 ____에 맞는것을 써넣어라. (필요조건, 충분조건)

1) $\alpha$, $\beta$가 실수이기때문에 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$가 다 실수라는것은 ____이지만 ____은 아니다.

2) $b=ac$이기때문에 $\frac{b}{a}=c$는 _____이지만 _____은 아니다.

6. $p$, $q$가 두개의 명제이고 《$p$ 또는 $q$》의 부정이 옳다면 아래에서 반드시 있게 되는것은 (　　)이다.

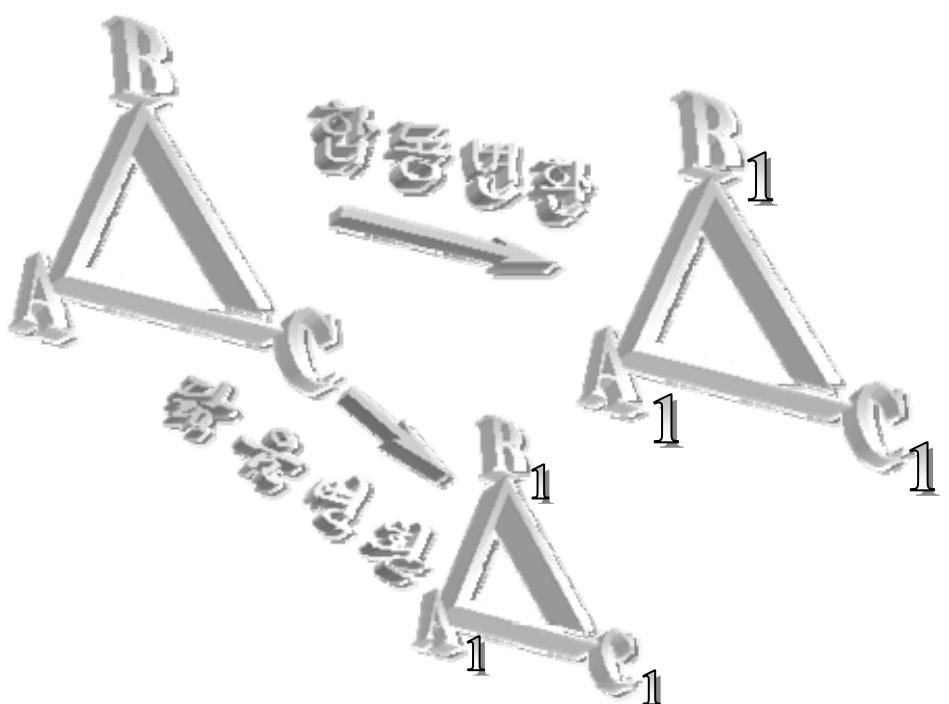
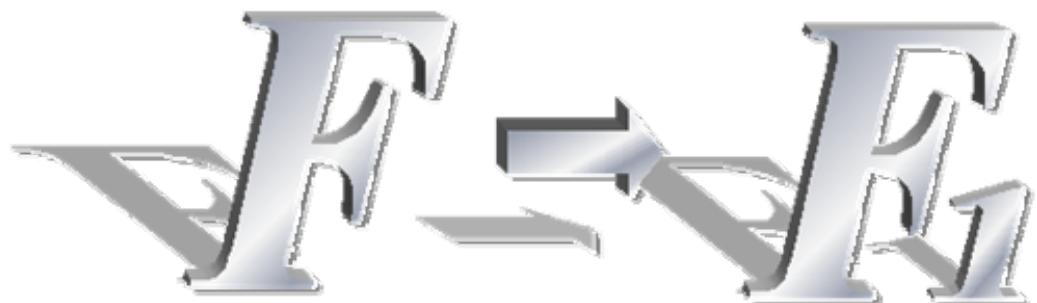
1) $p$ 옳다, $q$ 옳다　　2) $p$ 옳지 않다, $q$ 옳지 않다

3) $p$ 옳다, $q$ 옳지 않다　　4) $p$ 옳지 않다, $q$ 옳다

### 모임론의 창시자 - 칸토르

칸토르(1845년-1918년)는 도이췰란드수학자로서 모든 수학리론의 기초로 되는 모임론을 창시하였다. 그는 유한모임에서 원소의 개수개념을 무한모임에로 일반화하여 무한모임에서 원소의 개수개념을 처음으로 정의하고 무한모임을 다루는 새로운 방법을 내놓았다. 칸토르가 모임론을 내놓은 당시 사람들은 그의 심오한 리론을 리해하지 못하였으며 오히려 가혹하게 비판까지 하였다.

그는 정신적장애를 받아 병원에 입원하게 되였으나 병원에서도 모임론에 대한 연구를 계속 진행하였으며 모임론을 창시하였다. 칸토르가 내놓은 모임론은 그가 죽은지 30년이 지나서야 수학의 엄격한 건설을 시도하는 과정에 수학계의 인정을 받게 되였으며 오늘에 와서는 모든 수학리론의 기초로 되고있다.

# 제 8 장. 변환과 산법을 가진 모임

도형의 변환

산법을 가진 모임

## 제 1 절. 도형의 변환

### 1. 도형의 변환

평면에서 평행이동, 회전이동, 축대칭이동과 같이 평면의 모든 점모임을 평면의 점모임으로 넘기는 1:1넘기기를 **변환**이라고 부른다.

어떤 변환 $f$에 의하여 어떤 도형 F가 다른 도형 $F_1$로 넘어갔다고 하자.

이때 $f$ 를 F의 도형 $F_1$에로의 변환이라고 부를 때도 있다.

**알아보기** 1. 평행이동에 의하여 3각형은 어떤 3각형으로 넘어가는가?

2. 중심닮음변환에 의하여 3각형은 어떤 3각형으로 넘어가는가?

> 도형 F 를 그와 합동인 도형으로 넘기는 변환을 합동변환이라고 부르며 그와 닮은 도형으로 넘기는 변환을 닮음변환이라고 부른다.

합동변환은 크기와 모양을 변하지 않게 하는 변환이고 닮음변환은 크기는 변할수 있으나 모양은 변하지 않게 하는 변환이다.

그림 8—2에서 도형 $F_1$은 도형 F를 중심닮음변환한것이고 도형 $F_2$는 도형 $F_1$을 회전이동한것이다.

그러므로 $F_1 \equiv F_2$ , $F \backsim F_2$이다.

또한 도형 $F_2$를 $F_1$로 넘기고 $F_1$을 F로 넘기는 변환도 생각할수 있다.

도형 F와 $F_2$가 닮음도형이면 합동변환과 중심닮음변환을 적당히 하여 F를 $F_2$로 넘길수 있다.

이렇게 하는것을 **변환의 합성**이라고 부른다.

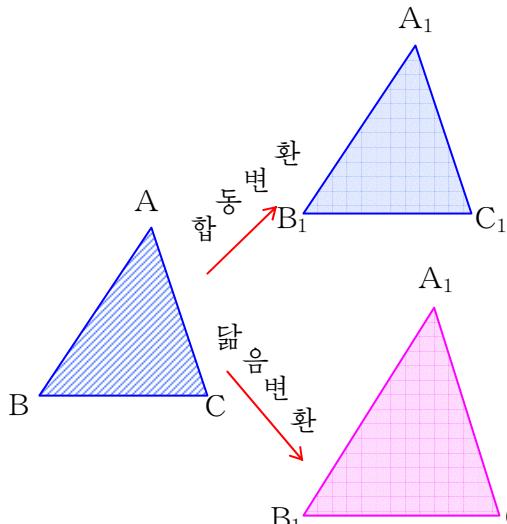
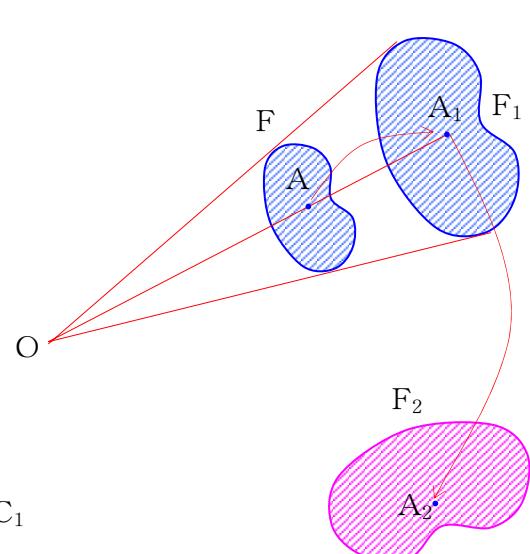
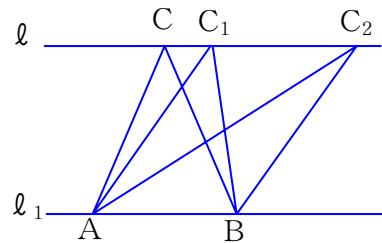



그림 8-1 그림 8-2

## 문 제

1. 다음 변환에서 합동변환, 닮음변환을 찾아보아라.
   평행이동, 회전이동, 축대칭이동, 중심닮음변환
2. 그림 8-3에서 $\ell // \ell_1$ 이다.
   $\triangle ABC$를 $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$로 넘길 때 변하지 않는것은 무엇인가? 이 변환은 합동변환인가, 닮음변환인가?

그림 8-3

변환들가운데는 모양과 크기가 변하는 변환도 있다.

**례 1** 1) 판을 프레스로 눌러 물건을 만들 때

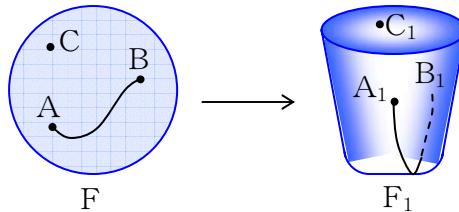



그림 8-4

2) 자동차바퀴의 쥬브에 바람을 넣을 때

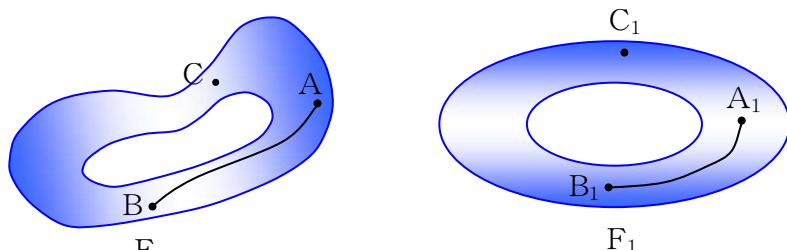



그림 8-5

**례 2** 1) 고무막을 늘일 때 찢어지는것

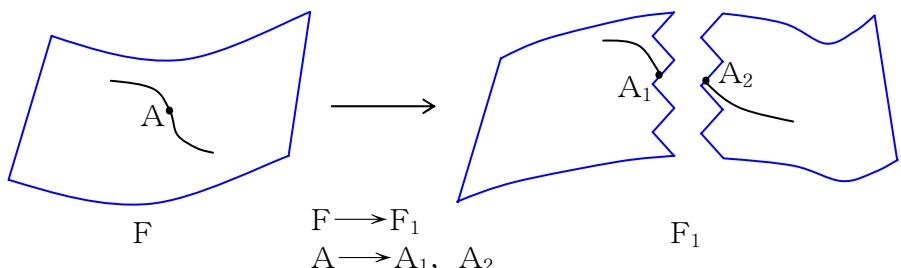
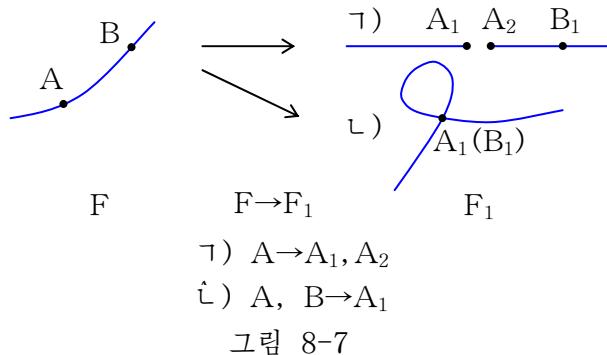



그림 8-6

2) 쇠줄을 늘일 때 끊어지거나 두 점이 겹치는것

ㄱ) A→$A_1$, $A_2$

ㄴ) A, B→$A_1$

그림 8-7

례 1의 변환에서 면, 선들의 이어진 상태는 달라지지 않는다.

**일반적으로 면들, 선들의 이어진 상태가 그대로 있는 변환을 련속변환이라고 부른다.**

여기서 면과 선들의 크기와 모양은 달라져도 좋고 달라지지 않아도 좋다.

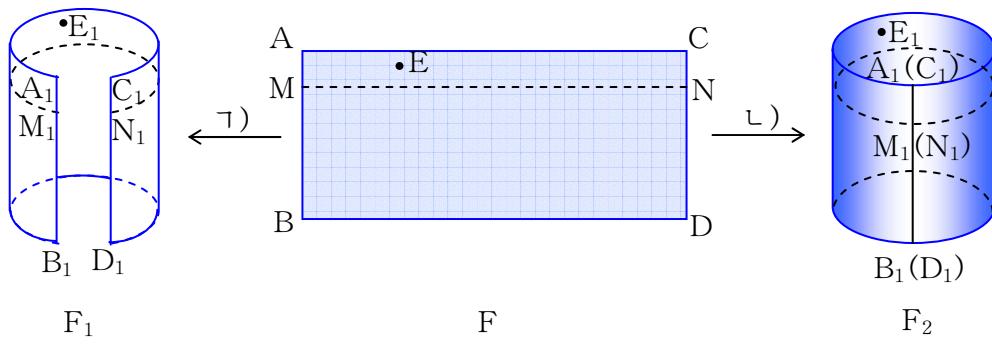
합동변환, 닮음변환, 련속변환사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

(련속변환의 모임)⊃(닮음변환의 모임)⊃(합동변환의 모임)

그림 8-8

**례 3** 그림 8—9의 ㄱ)과 같이 직4각형 F를 말아서 $F_1$과 같은 도형으로 1:1로 넘기면 이 넘기기는 련속변환이다. 그러나 ㄴ)과 같이 직4각형 F를 말아서 원기둥의 옆면 $F_2$로 넘긴다면 이 넘기기는 련속변환이 아니다. 이때에는 F → $F_2$에서

A, C → $A_1$ ; M, N → $M_1$ ; B, D → $B_1$

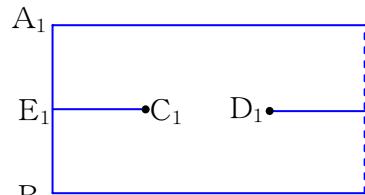
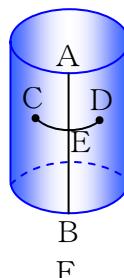
그림 8-9

**례 4** 그림 8-10과 같이 원기둥옆면 F를 그 옆면의 전개도 $F_1$로 1:1로 넘긴다면 이 넘기기는 변환이다.

(여기서 $F_1$의 점선으로 표시한 변에는 AB가 대응하지 않는다고 본다.)

이 변환은 F에서 이어져있던 선 CD가 $F_1$에서는 끊어졌기때문에 련속변환은 아니다.

A
C
D
E
B
F
$A_1$
$E_1$
$C_1$
$D_1$
$B_1$
$F_1$

그림 8-10

## 문 제

1. 그림 8-11과 같이 전등불에 의하여 원 F의 그림자가 구면에서 곡면 $F_1$로 나타났다. F $\rightarrow F_1$은 련속변환이라고 말할수 있는가? 또 닮음변환이라고도 말할수 있는가?

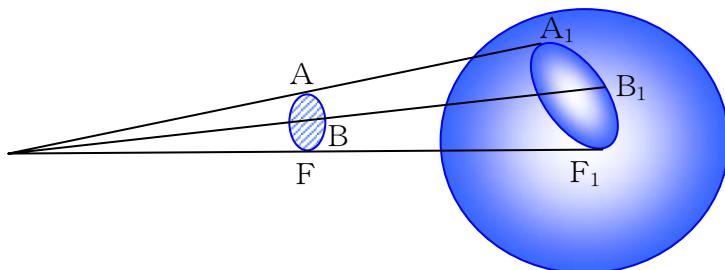



그림 8-11

2. 그림 8—12와 같이 F를 구부려 $F_1$을 얻었다. F $\rightarrow F_1$은 련속변환이라고 말할수 있는가?

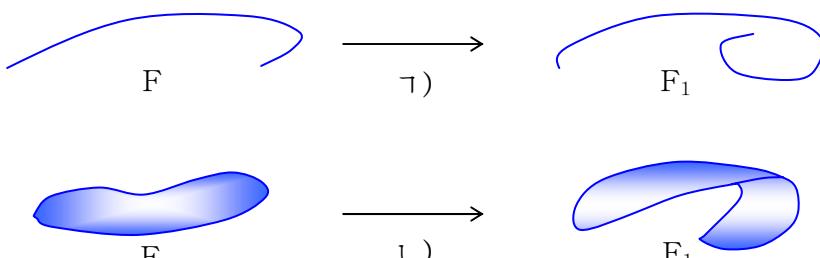



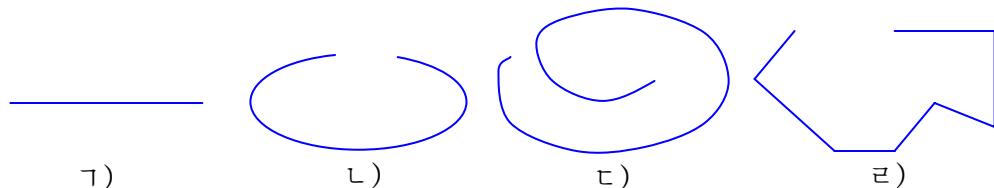
그림 8-12

## 2. 도형의 련속변환

### 1) 선의 련속변환

#### (1) 선분의 련속변환

선분을 련속변환하면 그림 8—13 과 같은 여러가지 모양의 선을 얻는다.

그림 8-13

선 ㄱ), ㄴ), ㄷ), ㄹ)들은 모두 어느 하나를 다른것들로 련속변환할수 있는것들이다. 이런 선들의 그 모양과 길이는 다를수 있으나 다음과 같은데서는 다 같다.

① 벌어진 선이다.

② 이 선을 한점에서 끊으면 두 부분으로 나누어진다.(그림 8—14)

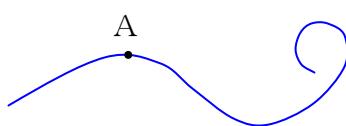
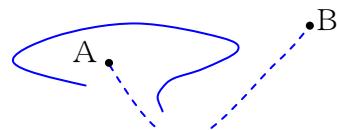



그림 8-14　　　　그림 8-15

③ 평면에서 이런 선은 평면을 두 부분으로 나누지 않는다. 선에 놓이지 않는 임의의 두 점 A, B도 그 선과 만나지 않는 선으로 이을수 있다.(그림8-15)

#### (2) 원둘레의 련속변환

원둘레를 련속변환하면 그림 8-16 과 같은 여러가지 모양의 도형을 얻는다.

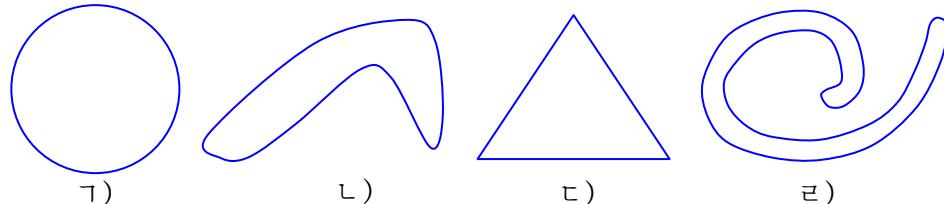



그림 8-16

선 ㄱ), ㄴ), ㄷ), ㄹ)들은 모두 어느 하나를 다른것들로 련속변환할수 있는것들이다. 이런 선들은 그 모양과 길이는 다를수 있으나 다음과 같은데서는 다 같다.

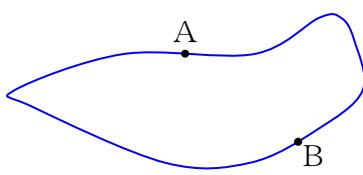
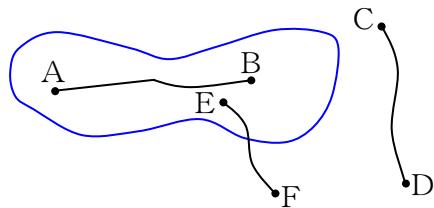



그림 8-17　　　그림 8-18

① 다문선이다.
② 이 선은 한 점에서 끊어도 두 부분으로 나누어지지 않는다. 두 점에서 끊어야 두 부분으로 나누어진다.(그림 8-17)
③ 평면에서는 다문선에 의하여 평면이 아낙과 바깥으로 나누어진다. 아낙점과 바깥점을 맺는 선은 반드시 이 선과 만난다.(그림 8-18)

### 2) 면의 련속변환

#### (1) 바른4각형의 련속변환

바른 4 각형을 련속변환하면 그림 8-19 와 같이 여러가지 모양의 도형들을 얻는다.

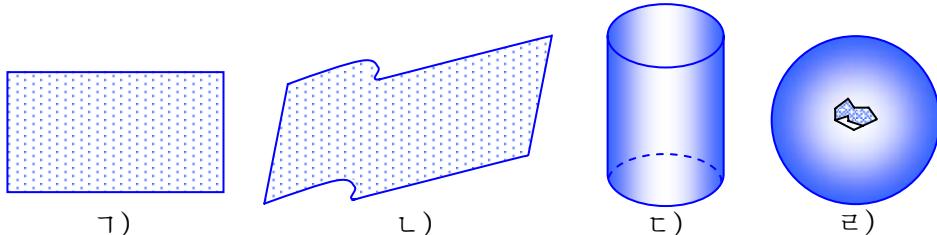



그림 8-19

면 ㄱ), ㄴ), ㄷ), ㄹ)들은 모두 어느 하나를 다른것들로 련속변환할수 있는것들이다. 이런 면들은 그 모양과 크기는 다를수 있으나 다음과 같은데서는 다 같다.

① 벌려져있는 면이다.
② 도중에서 자기끼리 만나지 않는다.
③ 이 면을 그림 8—20과 같이 그 둘레의 두 점을 맺는 선을 따라서 한번 자르면 두 부분으로 나누인다.
④ 이런 면은 공간을 두 부분으로 나누지 않는다. 면에 놓이지 않는 임의의 두 점 A, B도 그 면과 만나지 않는 선으로 이을수 있다.(그림 8—21)

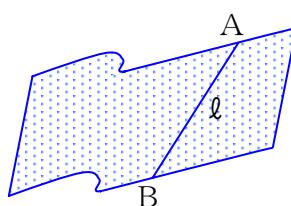
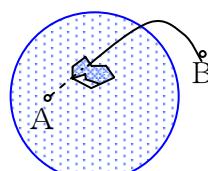



그림 8-20　　　그림 8-21

### (2) 구면의 련속변환

구면을 련속변환하면 그림 8-22와 같은 여러가지 모양의 도형을 얻는다.

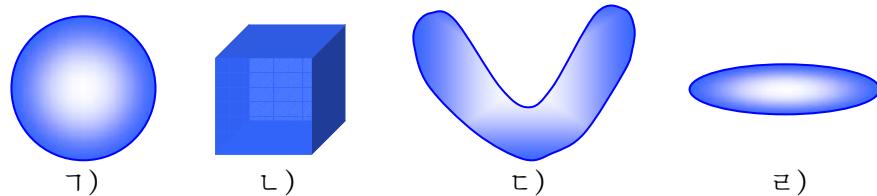



그림 8-22

면 ㄱ), ㄴ), ㄷ), ㄹ)들은 모두 어느 하나를 다른것들로 련속변환할수 있는것들이다. 이런 면들은 그 모양과 크기는 다를수 있으나 다음과 같은데서는 다 같다.

① 다물어져있는 면이다.

② 도중에서 자기끼리 만나지 않는다.

③ 이 면을 그림 8-23에서와 같이 그 우에 있는 다문선 $\ell$을 따라서 한번 자르면 두 부분으로 나누어진다.

④ 이런 면에 의하여 공간은 아낙과 바깥으로 나누어진다. 아낙점과 바깥점을 맺는 선은 반드시 이 면과 만난다.

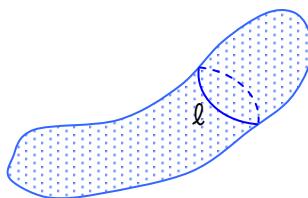



그림 8-23

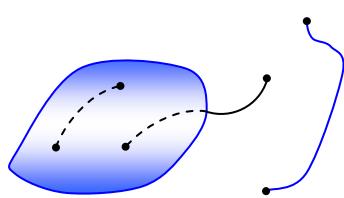



그림 8-24

그림 8-25와 같은 그라프에서 마디점 A로부터 B에로 가는 《길》은 여러개 있다. 실례로 길 ACB, AEB, AB 등은 다 길이다.

길가운데서 길 AEBCA와 같이 제자리로 돌아오는 길을 **다문길**이라고 부른다.

다문길이 없는 그라프를 **나무**라고 부른다.

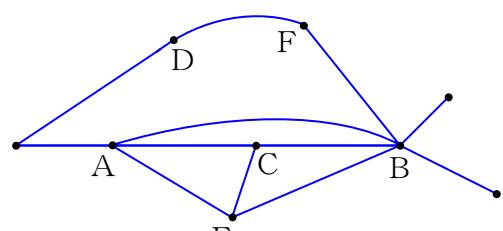



그림 8-25

나무에서 마디점의 수를 $m$, 마디의 수를 $n$이라고 하면 늘

$$m-n=1$$

이다.

이것은 나무를 만드는 과정을 보면 알수 있다. 즉 마디수가 1인 나무에서 $m$-$n$=2-1=1인데 마디를 하나씩 늘일 때마다 마디점도 꼭 하나씩 는다.

이리하여 어떤 나무에서나 $m-n$에는 변화가 없이 늘 1이 된다. 즉 늘

$$m-n=1$$

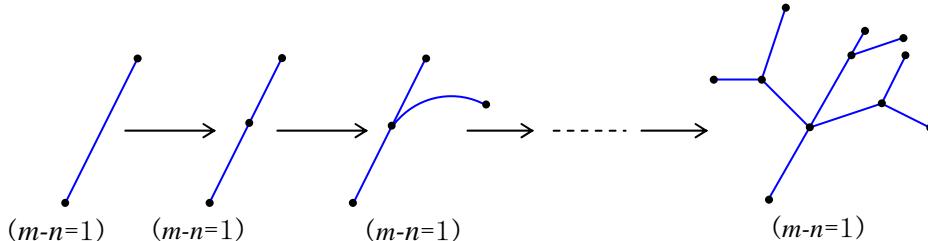



그림 8-26

그림 8-27과 같이 어떤 면에 놓인 그라프에서 마디에 의하여 둘러막힌 평면의 유한부분을 그라프의 **면**이라고 부를 때도 있다.

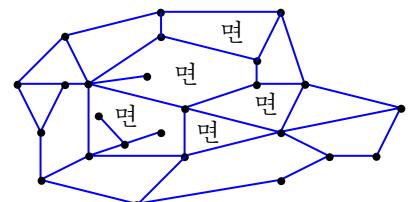



그림 8-27

**정리 1.** 평면에 놓인 그라프에서 마디점의 수를 $\boldsymbol{m}$, 마디의 수를 $\boldsymbol{n}$, 면의 수를 $\boldsymbol{p}$라고 하면 $\boldsymbol{m-n+p=1}$

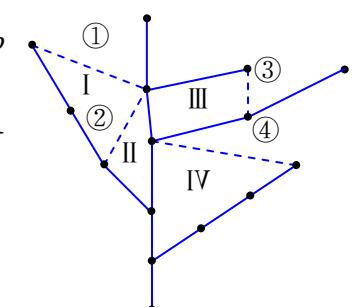
**(증명)** 그라프로부터 나무를 만들려면 그라프의 면을 없애야 한다. 면을 하나 없애려면 그 면에 붙어있는 마디를 하나 떼여버리면 된다.

실례로 그림 8-28에서 마디 ①을 떼면 면 Ⅰ이 없어지고 마디 ③을 떼면 면 Ⅲ이 없어진다. $p$개의 면을 다 없애려면 $p$개의 마디를 떼여버려야 한다. 그러므로 $m$개 마디점과 $n$개의 마디 그리고 $p$개의 면을 가진 그라프에서 $p$개의 마디를 떼여버리고 마지막에 나무를 만들었을 때 이 위상그라프의 마디점의 수는 $m$그대로이고 마디의 수는 $n-p$로 된다.

그림 8-28

그러면 나무의 성질에 의하여

$$m-(n-p)=1$$

$$\therefore m-n+p=1$$

이런 증명수법을 《줄임법》이라고 부른다.

**정리 2.** (오일레르정리) 다면체에서 정점의 수를 $\boldsymbol{m}$, 모서리수를 $\boldsymbol{n}$, 면의 수를 $p$라고 하면 $m-n+p=2$

(증명) 다면체의 겉면에서 한 면을 떼내고 바른4각형면에 련속변환하면 그림 8-29의 ㄷ)과 같은 그라프를 얻을수 있다. 이때 마디점의 수는 $m$, 마디의 수는 $n$, 면의 수는 $p-1$이다. 따라서 정리 1에 의하여

$$m-n+(p-1)=1$$

$$\therefore\ m-n+p=2$$

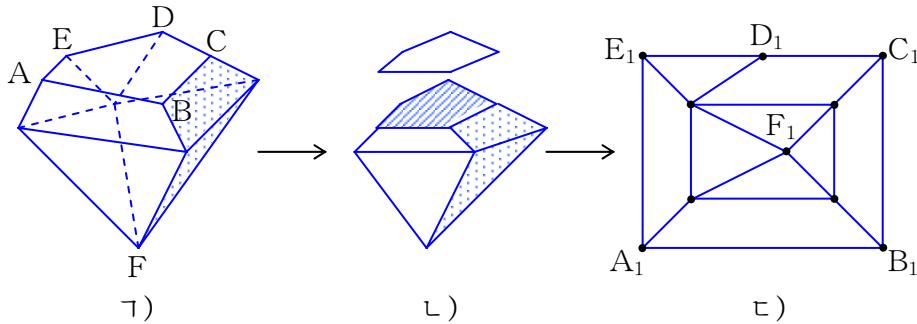



그림 8-29

이것은 ㄴ)에서 한면을 다시 붙인 ㄱ)에서의 $m$, $n$, $p$사이의 관계이다.
일반적으로 다문면에서 $m-n+p$를 오일레르특성수라고 부른다.

(주의) 우의 증명수법을 이. 씨. 지만의 《외과수술방법》이라고 부른다. 도형을 자르고 붙이되 마지막에는 제자리로 돌아가게 한다. 이 증명수법은 줄임법과 함께 앞으로 높은 단계의 기하를 학습하고 연구할 때 널리 쓰이게 된다.

정리 2의 공식은 볼록한 다면체뿐아니라 오목한 다면체에서도 늘 옳다. 또한 다면체의 겉면을 련속변환하여 얻은 도형에 대해서도 늘 옳다.

## 문 제

1. 그림 8-30의 그라프들에서 몇개의 마디를 떼여버리면 나무가 되겠는가? 실지 나무를 만들어보아라.

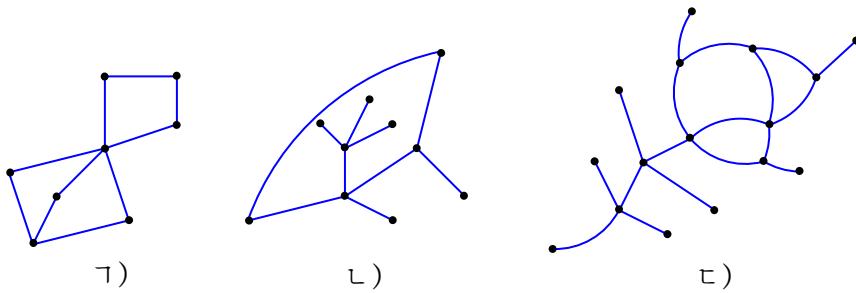



그림 8-30

2. 그림 8-31에 있는 세 도형가운데서 어느 하나를 련속변환하여 다른 하나를 얻을 수 있겠는가?

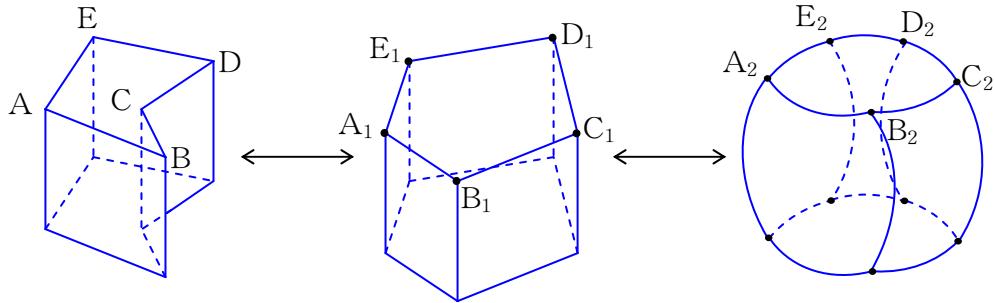



그림 8-31

3. 원둘레를 그와 사귀지 않는 직선을 축으로 하여 돌릴 때 고리형면이 생긴다. (그림 8-32)구면을 고리형면으로 련속변환할수 있는가?

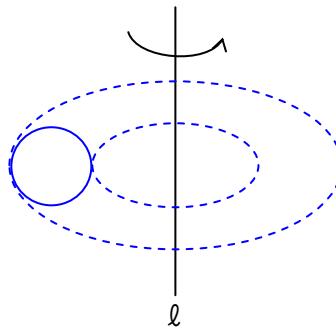



그림 8-32

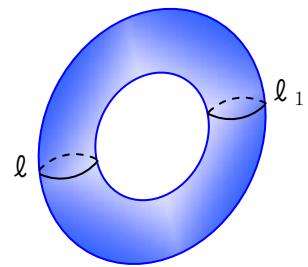



그림 8-33

4. 그림 8-33과 같은 고리형면에 두 다문선 $\ell$과 $\ell_1$이 있다. 다문선 $\ell$과 $\ell_1$을 따라 자르면 그 고리형면이 둘로 나누어지겠는가?

## 련 습 문 제

1. 어떤 도형 F에 두 평행이동 $\vec{a}, \vec{b}$를 거듭 실시하여 (합성) $F_1$로 넘기였다.
   도형 F를 $F_1$로 넘기는 평행이동 $\vec{c}$가 있는가?
   이 합성을 평행이동 $\vec{a}, \vec{b}$의 더하기라고 부르고 $\vec{a}+\vec{b}$로 표시한다.
2. 어떤 도형 F에 두 회전이동 $O(\alpha_1)$, $O(\alpha_2)$를 거듭 실시하여 (합성) $F_1$로 넘기였다.
   도형 F를 $F_1$로 넘기는 회전이동 $O(\alpha_3)$이 있는가?
   이 합성을 회전이동 $O(\alpha_1)$, $O(\alpha_2)$의 더하기라고 부르고 $O(\alpha_1)+O(\alpha_2)$로 표시한다.
3. 그림 8-34의 4각형에 대각선이 그어져있다. 이 도형을 다음과 같이 변환할 때 달라지는것과 달라지지 않는것을 각각 ×와 ○로 표시하여라.

|  | 변의 길이 | 각의 크기 | 면 적 | 모 양 |
|---|---|---|---|---|
| 합동변환 |  |  |  |  |
| 닮음변환 |  |  |  |  |
| 련속변환 |  |  |  |  |

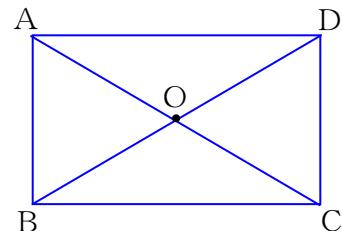



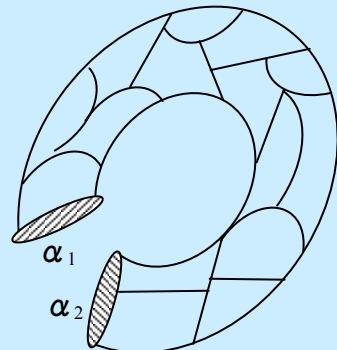
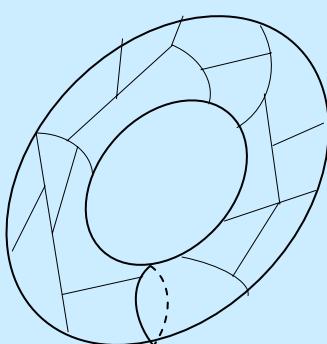
그림 8-34

자동차쥬브면에 그려져있는 그라프가 그림과 같이 주어져있다.
이때 $m-n+p$는 얼마이겠는가?

1) 자동차쥬브면을 그림과 같이 다문선 $\ell$로 자르고 구멍을 면 $\alpha_1$, $\alpha_2$로 막으면 구면을 련속변환한 면에 그려진 그라프로 볼수 있는가?

2) 이때 $m-n+p=2$라는것을 알고 면 $\alpha_1$, $\alpha_2$를 제거하고 처음상태로 만들 때 마디점수, 마디수, 면의 수가 달라지는것을 보고 $m-n+p$를 계산해보아라.

## 제 2 절. 산법을 가진 모임

### 1. 산법

1) 두 실수 3과 $\sqrt{2}$의 렬 $(3, \sqrt{2})$에 수

$$3+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ \frac{3}{\sqrt{2}}$$

을 각각 대응시킬 때 그 대응규칙을 알아보아라.

2) 두 복소수 $1+6i$, $1-6i$의 렬 $(1+6i, 1-6i)$에 복소수 2, $12i$, 37을 각각 대응시킬 때 그 대응규칙은 무엇인가?

모임 S의 두 원소 $a$, $b$의 렬 $(a, b)$에 한 원소 $c$를 대응시키는 규칙

$$*:(a, b)\rightarrow c$$

를 모임 S에서의 산법이라고 부르며

$$a*b=c$$

라고 쓴다.

**례 1** 옹근수모임 Z의 임의의 두 원소 4와 -3의 렬 (4, -3)에 4+(-3)을 대응시키는 규칙 즉 더하기규칙

$$*:(4, -3)\rightarrow 4+(-3)$$

을 주면 4+(-3)=1이므로 옹근수모임에서 더하기는 산법이다.

여러마디식모임에서 더하기, 덜기규칙도 여러마디식모임에서의 산법이다. 그리고 평행이동 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 렬 $(\vec{a}, \vec{b})$에 평행이동 $\vec{c}\,(=\vec{a}+\vec{b})$를 대응시키는 두 평행이동의 더하기는 평행이동들의 모임에서의 산법으로 볼수 있다. 회전이동도 마찬가지다.

### 문 제

1. 두 옹근수 $a$, $b$의 렬 $(a, b)$, $(b, a)$에 더하기산법을 하여 각각 $c$, $c_1$이 얻어졌다면 $c=c_1$이라고 말할수 있는가?
2. 자연수모임 N에서 임의의 두 원소 $a$, $b$의 렬 $(a, b)$에 $b^a$ ($b$의 $a^2$제곱)을 대응시키는 규칙을 산법(제곱산법)이라고 말할수 있는가?
3. 임의의 실수 $a$, $b$에 대하여 $\log_b a$도 실수모임에 속하는가? 산법(로그산법)이라고 말할수 있는가?

**알아보기** 1) 자연수모임 N의 임의의 두 원소 $a$, $b$의 렬 $(a, b)$에 덜기산법을 하여 $a-b$를 얻었다면 늘 $a-b\in$N인가? 더하기산법을 하였을 때는 어떤가?

2) 복소수모임 C의 임의의 두 원소 $a$, $b$에 대하여 늘 $a+b$, $a-b$, $ab$, $\frac{a}{b}\in$C인가?

모임 S의 임의의 두 원소 $a$, $b$에 산법 $*$을 하였을 때 늘 S에 속하는 원소가 나오면 $*$을 S에서 정의된 산법이라고 부르며 이때 S는 산법 $*$에 관하여 닫긴다고 말한다.

**례 2** 1) 자연수모임 N은 더하기, 곱하기에 관해서는 닫기지만 덜기, 나누기에 관해서는 닫기지 않는다.

2) 옹근수모임 Z는 더하기, 덜기, 곱하기에 관해서는 닫기지만 나누기에 관해서는 닫기지 않는다.

3) 실수모임 R는 더하기, 덜기, 곱하기, 나누기에 관하여 닫긴다.

례 3 여러마디식모임은 더하기, 덜기, 곱하기에 관하여 닫기지만 나누기에 관해서는 닫기지 않는다.

## 문 제

1. 복소수모임은 어떤 산법에 관하여 닫기는가?
2. 실수모임은 제곱산법에 관하여 닫기는가?
3. 평행이동, 회전이동의 모임이 더하기산법에 관하여 닫기는가?

### 2. 산법을 가진 모임

알아보기 1) 옹근수모임 Z의 임의의 원소 $a$, $b$, $c$에 대하여 다음 법칙이 만족되는가?

① $a+b=b+a$, $ab=ba$ (바꿈법칙)

② $(a+b)+c = a+(b+c)$ , $(ab)c =a(bc)$ (묶음법칙)

③ $(a+b)c =ac+bc$ (분배법칙)

2) 수모임 N, Q, R, C들도 더하기, 곱하기에 관하여 묶음법칙을 만족시키는가?

더하기 또는 곱하기산법 $*$에 관하여 모든 수모임, 식모임은 묶음법칙을 만족시킨다. 즉

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

일반적으로 모든 수모임, 식모임에서 덜기산법, 나누기산법에 관하여 묶음법칙, 바꿈법칙이 성립하지 않는다.

례 1 $\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}\neq\frac{4}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)$이므로 유리수모임 Q에서 덜기산법에 관하여 묶음법칙이 성립하지 않는다.

례 2 $\left(\frac{4}{3}\div\frac{2}{3}\right)\div\frac{2}{3}\neq\frac{4}{3}\div\left(\frac{2}{3}\div\frac{2}{3}\right)$이므로 유리수모임 Q에서 나누기산법에 관하여 묶음법칙이 성립하지 않는다.

알아보기 더하기와 곱하기에 대하여 다음 같기식이 옳은가?

1) $a+0=a$

2) $a\times1=a$

더하기, 곱하기가 정의된 모임 S의 임의의 원소 ***a***에 대하여

$$a+e'=e'+a=a,\quad a\times e''=e''\times a=a$$

인 원소 ***e***′ 를 령원소, ***e***″ 를 단위원소라고 부른다.

례 3 모든 수모임, 식모임에서 $e'=0$, $e''=1$이다.

례 4 평행이동 $\vec{a}$의 모임에서 0원소는 $\vec{0}$이다.

알아보기 1) 옹근수모임 Z에서 임의의 옹근수 $a$를 잡았을 때

$$a+a'=0,\quad a\times a''=1$$

인 옹근수 $a'$, $a''$가 늘 있는가?

2) 유리수모임 Q, 실수모임 R, 복소수모임 C에서는 어떤가?

더하기, 곱하기가 정의된 모임 S의 원소 ***a*** 에 대하여

$$a+a'=a'+a=0,\quad a\times a''=a''\times a=1$$

인 원소 ***a***′ 를 ***a***의 반대원소, ***a***″ 를 ***a***의 거꿀원소라고 부른다.

례 5 임의의 유리수(유리식) $a(\neq 0)$에 대하여

$$a+(-a)=0,\quad a\cdot\frac{1}{a}=1$$

이므로 유리수(유리식)모임 Q에서 $a$의 반대원소는 $-a$이고 $a$의 거꿀원소는 $\frac{1}{a}$이다.

례 6 평행이동의 모임에서 원소 $\vec{a}$의 반대원소는 $-\vec{a}$이고 함수모임에서 원소 $f(x)$의 반대원소는 $-f(x)$이다.

례 7 $1\div 5=\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}\notin N$ 즉 자연수모임에서는 나누기산법이 정의되지 않으므로 거꿀원소가 없다. 그리고 $0\notin N$이므로 령원소도 없다.

문 제

1. 실수모임, 복소수모임에서 임의로 수를 하나 잡고 그것의 반대원소, 거꿀원소를 찾아보아라.
2. 유리함수모임, 무리함수모임에서 반대원소를 말하여라.

**알아보기** 1) 수모임, 식모임에서 묶음법칙을 만족시키며 령원소, 반대원소를 다 가지는 모임을 찾아보아라.
2) 또한 묶음법칙을 만족시키면서 단위원소, 거꿀원소를 다 가지는 모임은 어느 모임인가?

> 모임 S에 더하기산법이 정의되였다고 하자. 이때
> 1) $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a$, $b$, $c \in S$
> 2) 령원소가 있다.
> 3) 반대원소가 있다.
> 를 만족시키면 S는 더하기에 관하여 군을 이룬다고 말한다.

우에서 더하기산법을 곱하기로 바꾸고 2)와 3)을 각각
2) 단위원소가 있다.
3) 거꿀원소가 있다.
로 바꾸면 S는 곱하기에 관하여 군을 이룬다고 말한다.

**례 8** 유리수모임은 더하기에 관하여 군을 이룬다. 그것은
1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ $a$, $b$, $c \in Q$
2) $0 \in Q$ : 령원소
3) $a+(-a)=0$, $-a \in Q$ : 반대원소
이기때문이다.

**례 9** 수모임 $\{0, 1\}$은 $1+1=0$으로 약속하면 더하기에 관하여 군을 이룬다. 그것은
1) 묶음법칙이 성립하고
2) $0+0=0$, $1+0=1$이므로 령원소가 있고
3) $0+0=0$, $1+1=0$이므로 0의 반대원소 0, 1의 반대원소 1이 있기때문이다.

**례 10** 평행이동의 모임은 더하기에 관하여 군을 이룬다.
그것은 임의의 세 평행이동 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$에 대하여

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

이고 령원소 $\vec{0}$와 임의의 $\vec{a}$의 반대원소 $-\vec{a}$가 있기때문이다.

## 문 제

1. 유리수모임은 곱하기에 관하여 군을 이루는가?
2. 실수모임은 더하기, 곱하기에 관하여 군을 이루는가?
3. 복소수모임은 더하기, 곱하기에 관하여 군을 이루는가?
4. 여러마디식모임은 더하기에 관하여 군을 이루는가?

탐 구

> 중심닮음변환의 모임은 더하기에 관하여 군을 이룬다는것을 밝혀라.
> 1) 중심닮음변환의 정의
> 2) 두 중심닮음변환의 합성(더하기)
> 3) 령원소
> 4) 반대원소
> 5) 군의 정의에 따르는 조건확인

## 련 습 문 제

1. 두 자연수의 렬에 최대공통약수를 대응시키는 규칙은 산법인가? 자연수모임은 이 산법에 관하여 닫기는가?
2. 다음의 표에 제시된 모임이 제시된 산법에 관하여 닫기는가를 따져보고 닫기면 O, 닫기지 않으면 ×를 표시하여라.

| 산법 / 수모임 | 더하기 | 덜 기 | 곱하기 | 나누기 |
|---|---|---|---|---|
| 3의 배수모임 | | | | |
| $\{a+\sqrt{2}b \mid a,\ b \in \mathbf{Z}\}$ | | | | |
| 참분수전체의 | | | | |

3. A= {0, 1, 2, 3} 의 두 원소 $a$, $b$에 $|a-b|$를 대응시키는 산법을 ∗로 표시하자.
   1) 이 산법에 대한 다음의 산법표를 완성하여라.

| ∗ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | 1 | | | |
| 2 | | | 0 | 1 |
| 3 | | | | |

   2) A는 산법 ∗에 관하여 닫기겠는가?
   3) 바꿈법칙이 성립하는가?
   4) 묶음법칙이 성립하는가?

4. A= {1, 2, 3, 6} 에서 산법 ∗는 두 원소 $a$, $b$에 그 최대공통약수를 대응시키는 규칙이다.
   1) 다음의 산법표를 완성하여라.

| ∗ | 1 | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | 3 |
| 6 | | | | |

   2) 단위원소가 있는가를 알아보아라.
   3) 거꿀원소가 있는가를 알아보아라.
5. 무리식모임이 더하기에 관하여 군을 이루는가?

## 복습문제

1. 변환의 합성을 더하기라고 부른다. 이때 다음 변환들의 모임이 더하기에 관하여 군을 이루는가?
   1) 합동변환의 모임
   2) 닮음변환의 모임
   3) 련속변환의 모임
2. 지수식의 모임이 더하기에 관하여 군을 이루는가?
3. A= {1, 2, 3, 6} 의 두 원소의 렬에 그 최소공통배수를 대응시키는 산법을 기호 ∗로 표시하자.
   1) ∗에 관한 산법표를 만들어라.

| ∗ | 1 | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 6 | | | | |

   2) A는 산법∗에 관하여 닫기는가?
   3) 산법 ∗에서 바꿈법칙과 묶음법칙이 성립하는가?
   4) A에 산법∗의 단위원소가 있는가?

4. 옹근수모임에서 두 수의 렬에 그가운데서 작지 않은 수를 대응시키는 산법을 기호 ∗로, 크지 않은 수를 대응시키는 산법을 기호 ⊕로 표시하자.

1) 다음의 계산을 하여라.

3∗7, 7∗3, -5∗-11, -11∗-7

2) 산법 ∗에서 바꿈법칙이 성립하는가?

3) 다음의 계산을 하여라.

(7∗5)∗9, 7∗(5∗9), (-8∗3) ∗(-14), -8∗(3∗(-14))

4) 산법 ∗에서 묶음법칙이 성립하는가?

5) 다음의 계산을 하여라.

6⊕(3⊕5), (6⊕3)⊕(6⊕5), -4⊕(-7⊕-8), (-4⊕-7)⊕(-4⊕-8), -9⊕(-6⊕-3), (-9⊕-6)⊕(-9⊕-3)

6) 산법 ∗, ⊕에 대해서 분배법칙이 성립하는가?

### 아직도 풀리지 않는 문제-쌍둥이씨수문제

씨수들가운데는 3과 5, 5와 7, 11과 13 등과 같이 짝수 하나를 사이에 두고 이웃하여있는 씨수들이 있다. 이러한 씨수들을 **쌍둥이씨수**라고 부른다.

쌍둥이씨수가 무한히 많겠는가 아니면 유한개이겠는가 하는 문제를 **쌍둥이씨수문제**라고 부른다.

쌍둥이씨수문제는 아직까지 풀리지 않는 유명한 문제로 남아있다.

그라프에서 어떤 마디점 A에 붙어있는 마디 A의 수를 그 마디점의 차수라고 부른다. 그림의 그라프에서 마디점 A의 차수는 4이다. 그라프에서 어떤 마디점 A에서 시작하여 매 마디를 꼭 한번씩 지나 제자리로 돌아오는 길이 있을 때 이 그라프를 오일레르그라프라고 부른다. 이때 《매 마디점의 차수가 짝수인 그라프는 오일레르그라프이다.》를 증명하여라. (케니스베르그다리문제의 일반화)

# 찾아보기

**편 찬 위 원 회**

김용진, 김영인, 한성일, 강영백, 리호용,
김창선, 류해동, 조룡휘

총편집 교수 박사 류 해 동

수학(제 1 중학교 제 5 학년용)
제 3 판

집 필 교수 박사 서기영, 교수 박사 류해동, 교수 박사 허달윤, 부교수 남호석, 부교수 김희일,
부교수 홍성구, 조룡휘, 김원희 주일생

심 사 심의위원회

편집 및 콤퓨터편성 김봉희

장 정 류명심　　　　교 정 오혜란

---

낸 곳 교육도서출판사

인쇄소　　　　2 판발행 주체 99(2010)년 4 월 5 일

3 판인쇄 주체 99(2010)년 3 월 25 일　　　　3 판발행 주체 101(2012)년 월 일

---

교-10-보-507　　　　값 45 원